Cours 4 : méthode révisée du simplexe

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

En route vers la méthode révisée

Point de départ :

- à chaque itération du simplexe, on recalcule entièrement le tableau
- seule une petite partie du tableau sert pour une itération donnée

$\Longrightarrow$ perte de temps

principe de la méthode révisée du simplexe

Essayer de reconstruire cette petite partie à partir du tableau d'origine

$\Longrightarrow$ a priori, moins de calculs à effectuer

- méthode utilisée pour résoudre les gros problèmes linéaires (milliers de variables et de contraintes), en général peu denses (beaucoup de 0)

Problème de départ :

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\max & 19x_1 + & 13x_2 + & 12x_3 + & 17x_4 & \\
s.c. & 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & 2x_4 & \leq 255 \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \leq 117 \\
 & 4x_1 + & 3x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 & \leq 420 \\
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

Introduction des variables d'écart :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
\max & 19x_1 + & 13x_2 + & 12x_3 + & 17x_4 & & & & \\
s.c. & 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & 2x_4 & + x_5 & & & = 255 \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & & + x_6 & & = 117 \\
 & 4x_1 + & 3x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 & & & + x_7 & = 420 \\
\end{array}
$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0$$

Tableau d'origine :

$$\begin{array}{rrrrl|r}
3x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & 2x_4 + & \boxed{x_5 \qquad\qquad} & = 255 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \quad + x_6 & = 117 \\
4x_1 + & 3x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 & \qquad\qquad + x_7 & = 420 \\
\hline
-z + 19x_1 + & 13x_2 + & 12x_3 + & 17x_4 & & = 0
\end{array}$$

Première itération : faire entrer x_1 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{c|rrrrl|r}
x_1 & + \frac{2}{3}x_2 + & \frac{1}{3}x_3 + & \frac{2}{3}x_4 + & \frac{1}{3}x_5 & & = 85 \\
 & \frac{1}{3}x_2 + & \frac{2}{3}x_3 + & \frac{1}{3}x_4 - & \frac{1}{3}x_5 + & x_6 & = 32 \\
 & \frac{1}{3}x_2 + & \frac{5}{3}x_3 + & \frac{4}{3}x_4 - & \frac{4}{3}x_5 & \quad + x_7 & = 80 \\
\hline
-z & + \frac{1}{3}x_2 + & \frac{17}{3}x_3 + & \frac{13}{3}x_4 - & \frac{19}{3}x_5 & & = -1615
\end{array}$$

base $(\widehat{x_1}, \widehat{x_6}, \widehat{x_7}) = (85, 32, 80) \Longrightarrow \widehat{x_2}, \widehat{x_3}, \widehat{x_4}, \widehat{x_5} = 0$

opérations algébriques $\Longrightarrow$ toute solution réalisable d'un tableau est aussi solution réalisable des tableaux précédents

Tableau d'origine :

$$\underbrace{\begin{array}{lll} 3x_1 & & \\ \;x_1 + x_6 & & \\ 4x_1 & & + x_7 \end{array}}_{B} \begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array} \underbrace{\begin{array}{l} 255 \\ 117 \\ 420 \end{array}}_{b}$$

Première itération :

$$\underbrace{\begin{array}{lll} x_1 & & \\ & x_6 & \\ & & x_7 \end{array}}_{B^{-1}B} \begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array} \underbrace{\begin{array}{l} 85 \\ 32 \\ 80 \end{array}}_{B^{-1}b}$$

$\Longrightarrow$ les tableaux du simplexe s'expriment en fonction de B^{-1}

- problème à résoudre :
  $$\max c^T x$$
  $$s.c. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$
- base réalisable $\Longrightarrow$ $\boxed{x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}}$:

  $x_B = (x_1, x_6, x_7)$ $\qquad$ $x_N = (x_2, x_3, x_4, x_5)$
- $A = [\ B \ \ N\ ]$:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\underbrace{\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix}}_{B} \quad \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{matrix}}_{N} \right]$$

- $\boxed{Ax = Bx_B + Nx_N}$
- $Ax = b \Longrightarrow$ $\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$

- $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \Longrightarrow c^T = [c_B^T \;\; c_N^T]$

  $z = c^T x = 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4$

  $\Longrightarrow c^T = [19 \quad 13 \quad 12 \quad 17 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

  $\Longrightarrow c_B^T = [19 \quad 0 \quad 0]$ et $c_N^T = [13 \quad 12 \quad 17 \quad 0]$
- $c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$
- $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Longrightarrow \boxed{c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N}$
- $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \Longrightarrow z = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N$

  $\Longrightarrow \boxed{z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N}$

Définition d'un dictionnaire

- B = base, N = hors base
- $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$
- $z = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N$

$\Longrightarrow$ méthode révisée du simplexe

À chaque itération de l'algorithme :

1. choisir une variable entrante
2. choisir une variable sortante $\Longrightarrow (x_B, x_N)$
3. faire une mise à jour de la solution réalisable : $\widehat{x_B}$

Exemple :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
\boxed{3x_1} & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & & & & = 255 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & & = 117 \\
4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & & & & & + x_7 & = 420 \\
\hline
-z + 19x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & + & 17x_4 & & & & & & = 0
\end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widehat{x_B} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_6} \\ \widehat{x_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix}$$

prochaine variable entrante : une variable dont le coefficient dans z est positif $\Longrightarrow$ calculer z

calcul de $z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$:

1. calculer $y^T = c_B^T B^{-1} \Longrightarrow$ résoudre le système $y^T B = c_B^T$:

$$[y_1 \ \ y_2 \ \ y_3] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = c_B^T = [19 \ \ 0 \ \ 0] \Longrightarrow y^T = \left[\tfrac{19}{3} \ \ 0 \ \ 0\right]$$

2. calculer $h^T = y^T N$:

$$h^T = y^T N = \left[\tfrac{19}{3} \ \ 0 \ \ 0\right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \left[\tfrac{38}{3} \ \ \tfrac{19}{3} \ \ \tfrac{38}{3} \ \ \tfrac{19}{3}\right]$$

3. calculer $\widehat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - h^T$:

$$\widehat{c}_N^T = [13 \ \ 12 \ \ 17 \ \ 0] - \left[\tfrac{38}{3} \ \ \tfrac{19}{3} \ \ \tfrac{38}{3} \ \ \tfrac{19}{3}\right] = \left[\tfrac{1}{3} \ \ \tfrac{17}{3} \ \ \tfrac{13}{3} \ \ \tfrac{-19}{3}\right]$$

$$\Longrightarrow \widehat{c}_N^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{17}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-19}{3} \end{bmatrix}$$

Après la première itération du simplexe :

$$\begin{array}{c|c|l|c|cr}
 & x_1 & + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & & = & 85 \\
 & & \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + & x_6 & = & 32 \\
 & & \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 & + x_7 & = & 80 \\
\hline
-z & & + \frac{1}{3}x_2 + \frac{17}{3}x_3 + \frac{13}{3}x_4 - \frac{19}{3}x_5 & & = & -1615
\end{array}$$

$\widehat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ = coeffs hors base de la fonction objectif pour la base (x_1, x_6, x_7)

$$\widehat{c}_N^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{17}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-19}{3} \end{bmatrix}$$

choix de la variable entrante : n'importe quelle variable de coeff positif dans $\widehat{c}_N^T$

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_N^T &= c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - y^T N \\
&= [13 \;\; 12 \;\; 17 \;\; 0] - \begin{bmatrix} \frac{19}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{17}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-19}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ on n'est pas obligé de calculer tout $\widehat{c}_N^T$:

e.g., calculer $\widehat{c}_N^T$ colonne par colonne et s'arrêter quand on a un nombre positif

$$\widehat{c}_N^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{17}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-19}{3} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{x_B} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_6} \\ \widehat{x_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 255 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 & = & 117 \\
4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 & = & 420 \\
\hline
-z + 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4 & = & 0
\end{array}$$

choix de la variable entrante : x_3

$\Longrightarrow$ augmenter la valeur de x_3 tout en assurant que les valeurs de x_B restent positives

$$Bx_B + Nx_N = b \Longrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

soit a la colonne de N correspondant à $x_3 \Longrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}ax_3$

soit a la colonne de N correspondant à $x_3 \Longrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}ax_3$

calcul de $d = B^{-1}a$: $\boxed{\text{résoudre } Bd = a}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow d = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix} - x_3 \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ valeur max de x_3 = 48 (ligne de x_6) $\Longrightarrow$ x_6 sort de la base

$$d = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Après la première itération du simplexe :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
 & \boxed{x_1} & + \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{2}{3}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & & & = & 85 \\
 & & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & + & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & + & x_6 & = & 32 \\
 & & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{5}{3}x_3 & + & \frac{4}{3}x_4 & - & \frac{4}{3}x_5 & & + x_7 & = & 80 \\
\hline
-z & & + \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{17}{3}x_3 & + & \frac{13}{3}x_4 & - & \frac{19}{3}x_5 & & & = & -1615
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ d = colonne de x_3 après la première itération du simplexe

Méthode révisée du simplexe (8/8)

Après la première itération du simplexe :

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
 & \boxed{x_1} & + \frac{1}{2}x_2 & & & + \frac{1}{2}x_4 & + \frac{1}{2}x_5 & - & \frac{1}{2}x_6 & & & = & 69 \\
 & & \frac{1}{2}x_2 & + & \boxed{x_3} & + \frac{1}{2}x_4 & - \frac{1}{2}x_5 & + & \frac{3}{2}x_6 & & & = & 48 \\
 & & -\frac{1}{2}x_2 & & & + \frac{1}{2}x_4 & - \frac{1}{2}x_5 & - & \frac{5}{2}x_6 & + & \boxed{x_7} & = & 0 \\
\hline
-z & & -\frac{5}{2}x_2 & & & + \frac{3}{2}x_4 & - \frac{7}{2}x_5 & - & \frac{17}{2}x_6 & & & = & -1887
\end{array}
$$

$$
d = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow \widehat{x_B} - 48 \times d = \begin{bmatrix} 85 \\ 32 \\ 80 \end{bmatrix} - 48 \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$\widehat{x_B} - 48d \Longrightarrow$ valeurs des variables en base $\Longrightarrow$ nouvel $\widehat{x_B}$

Synthèse sur la méthode révisée du simplexe

Itération de l'algorithme révisé du simplexe

B = base courante $\quad\quad \widehat{x_B}$ = valeur de la solution courante

1. calculer y^T tel que $y^T B = c_B^T$ ($\Longrightarrow y^T = c_B^T B^{-1}$)
2. choisir une colonne entrante : n'importe quelle colonne a de N telle que $c_a^T > y^T a$, où c_a^T = coeff de la colonne a dans c^T
3. calculer d tel que $Bd = a$ ($\Longrightarrow d \approx$ valeur de la colonne a après itération du simplexe)
4. trouver le plus grand nombre t tel que $\widehat{x_B} - td \geq 0$
   - si $t = +\infty$: problème non borné
   - sinon : au moins 1 ligne = 0 $\Longrightarrow$ variable sortant de la base
5. remplacer $\widehat{x_B}$ par $\widehat{x_B} - td$, puis la ligne correspondant à la variable sortante par t
6. remplacer dans B la colonne de la variable sortante par celle de la variable entrante

Efficacité de l'algo révisé : calcul de $y^T B = c_B^T$ et de $Bd = a$

- B_k : base après k itérations
- B_k ne diffère de B_{k-1} que par la colonne a rentrant à l'itération k
- supp que la colonne de a dans B_k soit la $p$ème
- a est la colonne qui rentre $\Longrightarrow$ à la $k$ème itération, $B_{k-1}d = a$

calcul de B_k

- E_k = matrice unité dont la $p$ème colonne est remplacée par d
- $B_k = B_{k-1}E_k$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- $B_0 = I$
- $B_1 = E_1$
- $B_2 = E_1 E_2$
- $B_3 = E_1 E_2 E_3$
- ....

- $y^T B_k = c_B^T \Longrightarrow y^T E_1 E_2 E_3 \dots E_k = c_B^T$
- $(\dots(((y^T E_1)E_2)E_3)\dots E_k) = c_B^T$
- calcul de y :
  1. $y_k^T E_k = c_B^T$
  2. $y_{k-1}^T E_{k-1} = y_k^T$
  3. $y_{k-2}^T E_{k-2} = y_{k-1}^T$
  4. ....

  k. $y^T E_1 = y_2^T$

résolution pratique de $y_k^T E_k = c_B^T$:

$$\begin{bmatrix} y_k^1 & y_k^2 & y_k^3 & y_k^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 32 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ y_k^3 \\ y_k^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ seul y_k^2 nécessite un calcul : $\begin{cases} s-1 & \text{additions} \\ s-1 & \text{multiplications} \\ 1 & \text{division} \end{cases}$

En pratique :

- lorsque $B_0 \neq I$: factorisations triangulaires de B_0
- en général : factorisation de B_k à l'aide des E_k plus rapide que le calcul de B_k^{-1}
- si ça n'est plus le cas (trop d'itérations) : refactoriser B_k comme si c'était un nouveau B_0

$\Longrightarrow$ méthode révisée plus rapide que la méthode standard sur de grosses instances