Cours 3 : Problèmes de dégénérescence

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Éviter les problèmes de dégénérescence

Dégénérescence $\Longrightarrow$ possibilité de cycles

$\Longrightarrow$ exemple de Beale (1955)

heureusement, les cycles sont rares !

il existe des méthodes garantissant que l'on ne cycle pas :

1. méthodes des perturbations
2. méthode lexicographique
3. règle du plus petit indice
4. ....

Méthode des perturbations

Idée force

- la dégénérescence est très rare $\Longrightarrow$ c'est plutôt un accident
- on peut la supprimer en «perturbant» très légèrement le tableau simplexe $\Longrightarrow$ ajouter des ϵ aux b_i
- $\epsilon \Longrightarrow$ les solutions obtenues par l'algo du simplexe $\approx$ solution du problème d'origine

Fiabilité de la méthode des perturbations (1/2)

ajouter le même ϵ aux b_i $\Longrightarrow$ méthode peu fiable

exemple :

$$
\begin{array}{ll}
\max & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5 \\
s.c. & x_5 + x_6 = 1 + \epsilon \\
& 0,5x_1 - 5,5x_2 - 2,5x_3 + 9x_4 + x_5 + x_7 = 1 + \epsilon \\
& 0,5x_1 - 1,5x_2 - 0,5x_3 + x_4 + x_5 + x_8 = 1 + \epsilon \\
& x_1 + x_5 + x_9 = 2 + \epsilon \\
& x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0
\end{array}
$$

base réalisable : (x_6, x_7, x_8, x_9)

$$
\begin{array}{l}
x_6 = 1 + \epsilon - x_5 \\
x_7 = 1 + \epsilon - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5 \\
x_8 = 1 + \epsilon - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5 \\
x_9 = 2 + \epsilon - x_1 - x_5 \\
z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ faire entrer x_5 et sortir (e.g.) x_6

Fiabilité de la méthode des perturbations (2/2)

$$\begin{aligned}
x_6 &= 1+\epsilon - x_5\\
x_7 &= 1+\epsilon - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5\\
x_8 &= 1+\epsilon - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5\\
x_9 &= 2+\epsilon - x_1 - x_5\\
z &= 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5
\end{aligned}$$

faire entrer x_5 et sortir x_6 :

$$\begin{aligned}
x_5 &= 1+\epsilon - x_6\\
x_7 &= - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 + x_6\\
x_8 &= - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 + x_6\\
x_9 &= 1 - x_1 + x_6\\
z &= 100 + 100\epsilon + 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 - 100x_6
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ on a perdu les ϵ mais il y a toujours dégénérescence

$\Longrightarrow$ ici, le simplexe cycle au bout de 6 itérations

Solution plus fiable

même ϵ pour chaque $b_i \Longrightarrow$ les ϵ s'éliminent d'une ligne sur l'autre

$\Longrightarrow$ choisir des ϵ_i très différents pour chaque b_i

méthode des perturbations

- choisir $0 < \epsilon_m \ll \epsilon_{m-1} \ll \cdots \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$
- appliquer l'algorithme du simplexe sur le tableau perturbé

choix possible : $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = \epsilon^2$, $\epsilon_3 = \epsilon^3$, etc

Solution plus fiable (suite)

$$\begin{aligned}
x_6 &= 1+\epsilon_1 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5\\
x_7 &= 1+\epsilon_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5\\
x_8 &= 1+\epsilon_3 - x_5\\
x_9 &= 2+\epsilon_4 - x_1 - x_5\\
z &= 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5
\end{aligned}$$

contrainte : $0 < \epsilon_4 \ll \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$

traiter les ϵ_i comme des variables :

$$\begin{aligned}
x_6 &= 1 + \epsilon_1 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5\\
x_7 &= 1 + \epsilon_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5\\
x_8 &= 1 + \epsilon_3 - x_5\\
x_9 &= 2 + \epsilon_4 - x_1 - x_5\\
z &= 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ faire entrer x_5 et sortir x_8

Solution plus fiable (fin)

Après pivotage :

$$\begin{aligned}
x_6 &= \epsilon_1 - \epsilon_3 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 + x_8\\
x_7 &= + \epsilon_2 - \epsilon_3 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 + x_8\\
x_5 &= 1 + \epsilon_3 - x_8\\
x_9 &= 1 - \epsilon_3 + \epsilon_4 - x_1 + x_8\\
z &= 100 + 100\epsilon_3 \; 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 - 100x_8
\end{aligned}$$

pivotages $\Longrightarrow$ les ϵ_i se mélangent sur les m premières colonnes :

m premières colonnes = $r = r_0 + \sum_{j=1}^{m} r_j \epsilon_j$

choix de la variable sortante = la ligne de plus petit r

La méthode lexicographique (1/2)

choix de la variable sortante = la ligne de plus petit $r = r_0 + \sum_{j=1}^{m} r_j \epsilon_j$

or la règle : $0 < \epsilon_4 \ll \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$

$\Longrightarrow$ si ligne i = $r = r_0 + \sum_{j=1}^{m} r_j \epsilon_j$ et ligne j = $s = s_0 + \sum_{j=1}^{m} s_j \epsilon_j$

alors $r < s \Longleftrightarrow r_k < s_k$ pour k le plus petit indice tel que $r_k \neq s_k$.

$\Longrightarrow$ ordre lexicographique

La méthode lexicographique (2/2)

Méthode lexicographique

- créer une colonne par ϵ_i
- choix des variables sortantes = la ligne de plus petit r (au sens lexicographique)

Théorème

L'algorithme du simplexe se termine, i.e., ne cycle pas, dès lors que les variables sortantes sont choisies avec la règle lexicographique

⚠ cette règle n'est à appliquer qu'en cas de dégénérescence

La méthode du plus petit indice

Règle du plus petit indice

Lorsque plusieurs variables sont candidates à entrer en base (selon un certain critère (e.g., les règles ci-dessus)), choisir celle qui a le plus petit indice dans le tableau. Faire de même avec les variables sortant de la base.

Théorème — Bland (1977)

si on applique cette nouvelle règle, l'algorithme du simplexe ne peut cycler.

⚠ cette règle n'est à appliquer qu'en cas de dégénérescence