

Cours 3 : Problèmes de dégénérescence

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Dégénérescence \implies possibilité de cycles

\implies exemple de Beale (1955)

heureusement, les cycles sont rares !



il existe des méthodes garantissant que l'on ne cycle pas :

- 1 méthodes des perturbations
- 2 méthode lexicographique
- 3 règle du plus petit indice
- 4

Idée force

- la dégénérescence est très rare
⇒ c'est plutôt un accident

Idée force

- la dégénérescence est très rare
 \implies c'est plutôt un accident
- on peut la supprimer en «**perturbant**» très légèrement le tableau simplexe \implies ajouter des ϵ aux b_i

Idée force

- la dégénérescence est très rare
⇒ c'est plutôt un accident
- on peut la supprimer en «perturbant» très légèrement le tableau simplexe ⇒ ajouter des ϵ aux b_i
- ϵ ⇒ les solutions obtenues par l'algo du simplexe \approx solution du problème d'origine

Fiabilité de la méthode des perturbations (1/2)

ajouter le même ϵ aux $b_i \implies$ méthode peu fiable

exemple :

$$\begin{array}{rcll} \max & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5 & & \\ \text{s.c.} & & x_5 + x_6 & = 1 + \epsilon \\ & 0,5x_1 - 5,5x_2 - 2,5x_3 + 9x_4 + x_5 & + x_7 & = 1 + \epsilon \\ & 0,5x_1 - 1,5x_2 - 0,5x_3 + x_4 + x_5 & + x_8 & = 1 + \epsilon \\ & x_1 & + x_5 & + x_9 = 2 + \epsilon \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 & & \end{array}$$

base réalisable : (x_6, x_7, x_8, x_9)

Fiabilité de la méthode des perturbations (1/2)

ajouter le même ϵ aux $b_i \implies$ méthode peu fiable

exemple :

$$\begin{aligned} \max \quad & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5 \\ \text{s.c.} \quad & x_5 + x_6 = 1 + \epsilon \\ & 0,5x_1 - 5,5x_2 - 2,5x_3 + 9x_4 + x_5 + x_7 = 1 + \epsilon \\ & 0,5x_1 - 1,5x_2 - 0,5x_3 + x_4 + x_5 + x_8 = 1 + \epsilon \\ & x_1 + x_5 + x_9 = 2 + \epsilon \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

base réalisable : (x_6, x_7, x_8, x_9)

$$\begin{aligned} x_6 &= 1 + \epsilon - x_5 \\ x_7 &= 1 + \epsilon - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5 \\ x_8 &= 1 + \epsilon - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5 \\ x_9 &= 2 + \epsilon - x_1 - x_5 \\ z &= 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5 \end{aligned}$$

\implies faire entrer x_5 et sortir (e.g.) x_6

Fiabilité de la méthode des perturbations (2/2)

$$\begin{aligned}x_6 &= 1 + \epsilon && - && x_5 \\x_7 &= 1 + \epsilon - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 && - && x_5 \\x_8 &= 1 + \epsilon - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 && - && x_5 \\x_9 &= 2 + \epsilon - x_1 && - && x_5 \\z &= && 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5\end{aligned}$$

faire entrer x_5 et sortir x_6 :

$$\begin{aligned}x_5 &= && 1 + \epsilon && - && x_6 \\x_7 &= && - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 + && x_6 \\x_8 &= && - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 + && x_6 \\x_9 &= && 1 - x_1 && + && x_6 \\z &= 100 + 100\epsilon + && 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 - 100x_6\end{aligned}$$

\implies on a perdu les ϵ mais il y a toujours dégénérescence

\implies ici, le simplexe cycle au bout de 6 itérations

même ϵ pour chaque $b_i \implies$ les ϵ s'éliminent d'une ligne sur l'autre

\implies choisir des ϵ_i très différents pour chaque b_i

même ϵ pour chaque $b_i \implies$ les ϵ s'éliminent d'une ligne sur l'autre

\implies choisir des ϵ_j très différents pour chaque b_i

méthode des perturbations

- choisir $0 < \epsilon_m \ll \epsilon_{m-1} \ll \dots \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$
- appliquer l'algorithme du simplexe sur le tableau perturbé

choix possible : $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = \epsilon^2$, $\epsilon_3 = \epsilon^3$, etc

Solution plus fiable (suite)

$$x_6 = 1 + \epsilon_1 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5$$

$$x_7 = 1 + \epsilon_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5$$

$$x_8 = 1 + \epsilon_3 - x_5$$

$$x_9 = 2 + \epsilon_4 - x_1 - x_5$$

$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5$$

contrainte : $0 < \epsilon_4 \ll \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$

Solution plus fiable (suite)

$$x_6 = 1 + \epsilon_1 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5$$

$$x_7 = 1 + \epsilon_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5$$

$$x_8 = 1 + \epsilon_3 - x_5$$

$$x_9 = 2 + \epsilon_4 - x_1 - x_5$$

$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5$$

contrainte : $0 < \epsilon_4 \ll \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$

traiter les ϵ_j comme des variables :

$$x_6 = 1 + \epsilon_1 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5$$

$$x_7 = 1 + \epsilon_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5$$

$$x_8 = 1 + \epsilon_3 - x_5$$

$$x_9 = 2 + \epsilon_4 - x_1 - x_5$$

$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5$$

Solution plus fiable (suite)

$$x_6 = 1 + \epsilon_1 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5$$

$$x_7 = 1 + \epsilon_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5$$

$$x_8 = 1 + \epsilon_3 - x_5$$

$$x_9 = 2 + \epsilon_4 - x_1 - x_5$$

$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5$$

contrainte : $0 < \epsilon_4 \ll \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$

traiter les ϵ_j comme des variables :

$$x_6 = 1 + \epsilon_1 - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 - x_5$$

$$x_7 = 1 + \epsilon_2 - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - x_4 - x_5$$

$$x_8 = 1 + \epsilon_3 - x_5$$

$$x_9 = 2 + \epsilon_4 - x_1 - x_5$$

$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 100x_5$$

\implies faire entrer x_5 et sortir x_8

Solution plus fiable (fin)

Après pivotage :

$$\begin{array}{rcllcllcl} x_6 = & \epsilon_1 & - & \epsilon_3 & - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 + & x_8 \\ x_7 = & & + \epsilon_2 - & \epsilon_3 & - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - & x_4 + & x_8 \\ x_5 = & 1 & & + \epsilon_3 & & & - & x_8 \\ x_9 = & 1 & & - \epsilon_3 + \epsilon_4 - & x_1 & & & + & x_8 \\ z = 100 & & + 100\epsilon_3 & & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 - 100x_8 \end{array}$$

Après pivotage :

$$\begin{array}{rcllcllcl}
 x_6 = & \epsilon_1 & - & \epsilon_3 & - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 + & x_8 \\
 x_7 = & & + \epsilon_2 - & \epsilon_3 & - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - & x_4 + & x_8 \\
 x_5 = & 1 & & + \epsilon_3 & & & - & x_8 \\
 x_9 = & 1 & & - \epsilon_3 + \epsilon_4 - & x_1 & & & + & x_8 \\
 z = 100 & & + 100\epsilon_3 & & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 - & 100x_8
 \end{array}$$

pivotages \implies les ϵ_j se mélangent sur les m premières colonnes :

$$m \text{ premières colonnes} = r = r_0 + \sum_{j=1}^m r_j \epsilon_j$$

Après pivotage :

$$\begin{array}{rcllcl}
 x_6 = & \epsilon_1 & - & \epsilon_3 & - 0,5x_1 + 5,5x_2 + 2,5x_3 - 9x_4 + & x_8 \\
 x_7 = & & + \epsilon_2 - & \epsilon_3 & - 0,5x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 - & x_4 + x_8 \\
 x_5 = & 1 & & + \epsilon_3 & & - x_8 \\
 x_9 = & 1 & & - \epsilon_3 + \epsilon_4 - & x_1 & + x_8 \\
 z = 100 & & + 100\epsilon_3 & & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 - & 100x_8
 \end{array}$$

pivotages \implies les ϵ_j se mélangent sur les m premières colonnes :

$$m \text{ premières colonnes} = r = r_0 + \sum_{j=1}^m r_j \epsilon_j$$

choix de la variable sortante = la ligne de plus petit r

choix de la variable sortante = la ligne de plus petit $r = r_0 + \sum_{j=1}^m r_j \epsilon_j$

or la règle : $0 < \epsilon_4 \ll \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll 1$

\implies si ligne $i = r = r_0 + \sum_{j=1}^m r_j \epsilon_j$ et ligne $j = s = s_0 + \sum_{j=1}^m s_j \epsilon_j$

alors $r < s \iff r_k < s_k$ pour k le plus petit indice tel que $r_k \neq s_k$.

\implies ordre lexicographique

Méthode lexicographique

- créer une colonne par ϵ_j
- choix des variables sortantes = la ligne de plus petit r (au sens lexicographique)

Théorème

L'algorithme du simplexe se termine, i.e., ne cycle pas, dès lors que les variables sortantes sont choisies avec la règle lexicographique



cette règle n'est à appliquer qu'en cas de dégénérescence

Règle du plus petit indice

Lorsque plusieurs variables sont candidates à entrer en base (selon un certain critère (e.g., les règles ci-dessus)), choisir celle qui a le plus petit indice dans le tableau. Faire de même avec les variables sortant de la base.

Théorème — Bland (1977)

si on applique cette nouvelle règle, l'algorithme du simplexe ne peut cycliser.



cette règle n'est à appliquer qu'en cas de dégénérescence