Cours 2 : algorithme du simplexe

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours

1. Rappels sur l'algorithme vu la semaine dernière
2. Définition de l'algorithme du simplexe
3. Interprétation géométrique
4. Critères de choix pour les variables entrantes

Rappels sur le cours de la semaine dernière (1/10)

Forme standard

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Rappels sur le cours de la semaine dernière (1/10)

Forme standard

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Algorithme de résolution (1/2)

1. Ajouter des variables d'écart $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$:

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{aligned}$$

Algorithme de résolution (2/2)

2. première solution réalisable : $x^0 = (0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$
   variables en base : $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, hors base : $x_1, \ldots, x_n$
3. s'il existe un coefficient positif dans z, soit x_i la variable correspondante, sinon aller en 8
4. calculer la valeur maximale de x_i de manière à ce que les variables en base restent positives ou nulles. Soit x_j une des variables en base qui s'annule
5. faire entrer x_i en base, faire sortir x_j de la base
6. exprimer les variables en base en fonction des variables hors base
7. retourner en 3
8. on est à l'optimum. Les variables en base définissent la solution optimale

Problème à résoudre :

$$
\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & + 5x_2 & + & x_3 & \\
s.c. & x_1 & + 3x_2 & + & x_3 & \leq 3 \\
 & -x_1 & & + & 3x_3 & \leq 2 \\
 & 2x_1 & + 4x_2 & - & x_3 & \leq 4 \\
 & x_1 & + 3x_2 & - & x_3 & \leq 2 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Problème à résoudre :

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + 5x_2 + x_3 \\
s.c. & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\
 & -x_1 + 3x_3 \leq 2 \\
 & 2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4 \\
 & x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Première étape : ajouter des variables d'écart :

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + 5x_2 + x_3 \\
s.c. & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -x_1 + 3x_3 + x_5 = 2 \\
 & 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 - x_3 + x_7 = 2 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0
\end{array}
$$

Expression de z et des variables en base en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_4 & = 3 - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = 2 + & x_1 & & & - & 3x_3 \\ x_6 & = 4 - & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 \\ x_7 & = 2 - & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\ z & = & x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 \end{array}$$

Expression de z et des variables en base en fonction des variables hors base :

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 2 + x_1 - 3x_3 \\
x_6 &= 4 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\
x_7 &= 2 - x_1 - 3x_2 + x_3 \\
z &= x_1 + 5x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

variables en base : x_4, x_5, x_6, x_7

$\Longrightarrow$ solution réalisable = $(0, 0, 0, 3, 2, 4, 2)$

Expression de z et des variables en base en fonction des variables hors base :

$$\begin{aligned}
x_4 &= 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 2 + x_1 - 3x_3 \\
x_6 &= 4 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\
x_7 &= 2 - x_1 - 3x_2 + x_3 \\
z &= x_1 + 5x_2 + x_3
\end{aligned}$$

variables en base : x_4, x_5, x_6, x_7

$\Longrightarrow$ solution réalisable = $(0, 0, 0, 3, 2, 4, 2)$

3. coefficients positifs dans $z \Longrightarrow x_1$, x_2 et x_3

$\Longrightarrow$ choix (au hasard) de faire rentrer x_1 en base

$$\begin{aligned}
x_4 &= 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 2 + x_1 - 3x_3 \\
x_6 &= 4 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\
x_7 &= 2 - x_1 - 3x_2 + x_3 \\
z &= x_1 + 5x_2 + x_3
\end{aligned}$$

4. calcul de la valeur optimale de x_1 :
   - augmenter $x_1 \Longrightarrow$ augmenter z
   - ne pas trop augmenter x_1 afin que x_4, x_5, x_6, x_7, restent ≥ 0

$$\begin{aligned}
x_4 &= 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 2 + x_1 - 3x_3 \\
x_6 &= 4 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\
x_7 &= 2 - x_1 - 3x_2 + x_3 \\
z &= x_1 + 5x_2 + x_3
\end{aligned}$$

4. calcul de la valeur optimale de x_1 :
   - augmenter $x_1 \Longrightarrow$ augmenter z
   - ne pas trop augmenter x_1 afin que x_4, x_5, x_6, x_7, restent ≥ 0

$$\begin{array}{ll}
(x_4) & 3 - x_1 \geq 0 \\
(x_5) & 2 + x_1 \geq 0 \\
(x_6) & 4 - 2x_1 \geq 0 \\
(x_7) & 2 - x_1 \geq 0
\end{array}$$

$\Longrightarrow x_1 \leq 3$, $x_1 \geq -2$, $x_1 \leq 2$, $x_1 \leq 2$

$$\begin{aligned}
x_4 &= 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 2 + x_1 - 3x_3 \\
x_6 &= 4 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\
x_7 &= 2 - x_1 - 3x_2 + x_3 \\
z &= \phantom{3 -{}} x_1 + 5x_2 + x_3
\end{aligned}$$

4. calcul de la valeur optimale de x_1 :
   - augmenter $x_1 \Longrightarrow$ augmenter z
   - ne pas trop augmenter x_1 afin que x_4, x_5, x_6, x_7, restent ≥ 0

$$\begin{array}{ll}
(x_4) & 3 - x_1 \geq 0 \\
(x_5) & 2 + x_1 \geq 0 \\
(x_6) & 4 - 2x_1 \geq 0 \\
(x_7) & 2 - x_1 \geq 0
\end{array}$$

$\Longrightarrow x_1 \leq 3$, $x_1 \geq -2$, $x_1 \leq 2$, $x_1 \leq 2 \Longrightarrow x_1 = 2$

$\Longrightarrow$ variable à sortir de la base : x_6 ou x_7

$$\begin{array}{lcl} x_4 &=& 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &=& 2 + x_1 - 3x_3 \\ x_6 &=& 4 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_7 &=& 2 - x_1 - 3x_2 + x_3 \\ z &=& x_1 + 5x_2 + x_3 \end{array}$$

5. choix (au hasard) de faire sortir x_7 de la base

$\Longrightarrow x_1 = 2 - 3x_2 + x_3 - x_7$

6. expression des variables en base en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{lcl} x_4 &=& 1 - 2x_3 + x_7 \\ x_5 &=& 4 - 3x_2 - 2x_3 - x_7 \\ x_6 &=& 2x_2 - x_3 + 2x_7 \\ x_1 &=& 2 - 3x_2 + x_3 - x_7 \\ z &=& 2 + 2x_2 + 2x_3 - x_7 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_4 &= 1 \phantom{{}- 3x_2} - 2x_3 + x_7 \\
x_5 &= 4 - 3x_2 - 2x_3 - x_7 \\
x_6 &= \phantom{4 - {}} 2x_2 - x_3 + 2x_7 \\
x_1 &= 2 - 3x_2 + x_3 - x_7 \\
z &= 2 + 2x_2 + 2x_3 - x_7
\end{aligned}$$

3. coefficients positifs dans z : x_2 et x_3

$\Longrightarrow$ choix (au hasard) : rentrer x_3 en base

$$\begin{aligned}
x_4 &= 1 \qquad\qquad - 2x_3 + x_7 \\
x_5 &= 4 - 3x_2 - 2x_3 - x_7 \\
x_6 &= \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_7 \\
x_1 &= 2 - 3x_2 + x_3 - x_7 \\
z &= 2 + 2x_2 + 2x_3 - x_7
\end{aligned}$$

3. coefficients positifs dans z : x_2 et x_3

$\Longrightarrow$ choix (au hasard) : rentrer x_3 en base

$\Longrightarrow$ choix de la variable à sortir de la base :

$$\left.\begin{array}{ll}
(x_4) & 1 - 2x_3 \geq 0 \\
(x_5) & 4 - 2x_3 \geq 0 \\
\color{red}{(x_6)} & \color{red}{0 -} \quad \color{red}{x_3 \geq 0} \\
(x_1) & 2 + \quad x_3 \geq 0
\end{array}\right\} \Longrightarrow x_3 = \min\{b_i / - \text{coeff de } x_3 : \text{coeff} \neq 0\}$$

⚠ x_3 rentre en base, mais sa valeur est égale à 0

$\Longrightarrow$ la valeur de la fonction objectif ne change pas !

6. expression des variables en base en fonction des variables hors base :

$$\begin{aligned}
x_4 &= 1 - 4x_2 + 2x_6 - 3x_7 \\
x_5 &= 4 - 7x_2 + 2x_6 - 5x_7 \\
x_3 &= \phantom{4 -{}} 2x_2 - x_6 + 2x_7 \\
x_1 &= 2 - x_2 - x_6 + x_7 \\
z &= 2 + 6x_2 - 2x_6 + 3x_7
\end{aligned}$$

3. coefficients positifs dans z : x_2 et x_3

$\Longrightarrow$ choix (au hasard) : rentrer x_2 en base :

$$\left.\begin{array}{ll}
\color{red}{(x_4)} & \color{red}{1 - 4x_2 \geq 0} \\
(x_5) & 4 - 7x_2 \geq 0 \\
(x_3) & \phantom{4 -{}} 2x_2 \geq 0 \\
(x_1) & 2 - x_2 \geq 0
\end{array}\right\} \Longrightarrow x_4 \text{ sort de la base}$$

6 expression des variables en base en fonction des variables hors base :

$$\begin{aligned}
x_2 &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}x_4 + \tfrac{1}{2}x_6 - \tfrac{3}{4}x_7 \\
x_5 &= \tfrac{9}{4} + \tfrac{7}{4}x_4 - \tfrac{3}{2}x_6 + \tfrac{1}{4}x_7 \\
x_3 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_4 \phantom{- \tfrac{3}{2}x_6} + \tfrac{1}{2}x_7 \\
\color{red}{x_1} &\color{red}{= \tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{4}x_4 - \tfrac{3}{2}x_6 + \tfrac{7}{4}x_7} \\
z &= \tfrac{7}{2} - \tfrac{3}{2}x_4 + x_6 - \tfrac{3}{2}x_7
\end{aligned}$$

3–6 rentrer x_6 en base et sortir x_1 :

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= \tfrac{5}{6} - \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{6}x_4 - \tfrac{1}{6}x_7 \\
x_5 &= \tfrac{1}{2} + x_1 + \tfrac{3}{2}x_4 - \tfrac{3}{2}x_7 \\
x_3 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_7 \\
x_6 &= \tfrac{7}{6} - \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{6}x_4 + \tfrac{7}{6}x_7 \\
z &= \tfrac{14}{3} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{4}{3}x_4 - \tfrac{1}{3}x_7
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow z \text{ : coeffs négatifs} \Longrightarrow \text{optimum}$$

En résumé :

- plusieurs variables peuvent être candidates à entrer en base
  $\Longrightarrow$ critère de choix à définir
- plusieurs variables peuvent être candidates à sortir de la base
  $\Longrightarrow$ critère de choix à définir
- dégénérescence : certaines variables entrant en base peuvent avoir pour valeur 0 $\Longrightarrow$ la fonction objectif n'augmente pas
  $\Longrightarrow$ éviter que l'algorithme ne boucle

Notation en tableau (1/5)

Principe : placer toutes les variables du même côté

$$\begin{array}{rcrrrrrrr}
x_4 & = & 3 & - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & 2 & + & x_1 & & & - & 3x_3 \\
x_6 & = & 4 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 \\
x_7 & = & 2 & - & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
z & = & & & x_1 & + & 5x_2 & + & x_3
\end{array}$$

Notation en tableau (1/5)

Principe : placer toutes les variables du même côté

$$
\begin{array}{rcrrrrrrr}
x_4 & = 3 & - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = 2 & + & x_1 & & & - & 3x_3 \\
x_6 & = 4 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 \\
x_7 & = 2 & - & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
z & = & & x_1 & + & 5x_2 & + & x_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
 & & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = 3 \\
 & - & x_1 & & & + & 3x_3 & & & + & x_5 & & & = 2 \\
 & & 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = 4 \\
 & & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & & + x_7 & = 2 \\
-z & + & x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & & & & & = 0
\end{array}
$$

Notation en tableau (2/5)

La notation en tableau peut s'appliquer à toutes les étapes :

Avant pivot :

dictionnaire	*tableau*
$x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3$	$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3$
$x_5 = 2 + x_1 - 3x_3$	$-x_1 + 3x_3 + x_5 = 2$
$x_6 = 4 - 2x_1 - 4x_2 + x_3$	$2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_6 = 4$
$x_7 = 2 - x_1 - 3x_2 + x_3$	$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_7 = 2$
$z = x_1 + 5x_2 + x_3$	$-z + x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$

Après pivot : x_1 entre et x_7 sort

dictionnaire	*tableau*
$x_4 = 1 - 2x_3 + x_7$	$2x_3 + x_4 - x_7 = 1$
$x_5 = 4 - 3x_2 - 2x_3 - x_7$	$3x_2 + 2x_3 + x_5 + x_7 = 4$
$x_6 = 2x_2 - x_3 + 2x_7$	$-2x_2 + x_3 + x_6 - 2x_7 = 0$
$x_1 = 2 - 3x_2 + x_3 - x_7$	$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_7 = 2$
$z = 2 + 2x_2 + 2x_3 - x_7$	$-z + 2x_2 + 2x_3 - x_7 = -2$

Notation en tableau (3/5)

Pivot en termes de dictionnaires

Faire entrer x_i et sortir x_j :
supp. que x_j est défini à gauche des «=» sur la $k$ème ligne

1. exprimer x_i en fonction des autres variables sur la $k$ème ligne
2. sur toutes les autres lignes, remplacer les x_i par cette expression

Pivot en termes de tableaux

Faire entrer x_i et sortir x_j :

1. diviser la seule ligne dont le coeff de x_j est $\neq 0$ ($k$ème ligne) par le coeff associé à x_i sur cette ligne
$\Longrightarrow$ le coeff de x_i devient 1
2. pour toute autre ligne $r \neq k$, soustraire a_{ri} fois la $k$ème ligne $\Longrightarrow$ le coeff de x_i sur ces lignes devient 0

Application du pivot directement sur les tableaux :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x_1 + 3x_2 + & x_3 + x_4 & & & & = 3 \\
- & x_1 & + 3x_3 & + x_5 & & & = 2 \\
 & 2x_1 + 4x_2 - & x_3 & & + x_6 & & = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 - & x_3 & & & + x_7 & = 2 \\
-z + & x_1 + 5x_2 + & x_3 & & & & = 0
\end{array}$$

pivot : x_1 entre et x_7 sort

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x_1 + 3x_2 + & x_3 + x_4 & & & & = 3 \\
- & x_1 & + 3x_3 & + x_5 & & & = 2 \\
 & 2x_1 + 4x_2 - & x_3 & & + x_6 & & = 4 \\
 & x_1 + 3x_2 - & x_3 & & & + x_7 & = 2 \\
-z + & x_1 + 5x_2 + & x_3 & & & & = 0
\end{array}$$

ligne où x_7 est défini : 4ème ligne

Application du pivot directement sur les tableaux :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
& x_1 + 3x_2 + & x_3 + x_4 & & & & = 3 \\
- & x_1 & + 3x_3 & + x_5 & & & = 2 \\
& 2x_1 + 4x_2 - & x_3 & & + x_6 & & = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - & x_3 & & & + x_7 & = 2 \\
-z + & x_1 + 5x_2 + & x_3 & & & & = 0
\end{array}$$

pivot : x_1 entre et x_7 sort

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
& x_1 + 3x_2 + & x_3 + x_4 & & & & = 3 \\
- & x_1 & + 3x_3 & + x_5 & & & = 2 \\
& 2x_1 + 4x_2 - & x_3 & & + x_6 & & = 4 \\
& \color{red}{x_1} + 3x_2 - & x_3 & & & + x_7 & = 2 \\
-z + & x_1 + 5x_2 + & x_3 & & & & = 0
\end{array}$$

coeff de x_1 = 1

Application du pivot directement sur les tableaux :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x_1 & + 3x_2 & + x_3 & + x_4 & & & & = 3 \\
 & - x_1 & & + 3x_3 & & + x_5 & & & = 2 \\
 & 2x_1 & + 4x_2 & - x_3 & & & + x_6 & & = 4 \\
 & x_1 & + 3x_2 & - x_3 & & & & + x_7 & = 2 \\
 -z + & x_1 & + 5x_2 & + x_3 & & & & & = 0
\end{array}
$$

pivot : x_1 entre et x_7 sort

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x_1 & + 3x_2 & + x_3 & + x_4 & & & & = 3 \\
 & - x_1 & & + 3x_3 & & + x_5 & & & = 2 \\
 & 2x_1 & + 4x_2 & - x_3 & & & + x_6 & & = 4 \\
 & x_1 & + 3x_2 & - x_3 & & & & + x_7 & = 2 \\
 -z + & x_1 & + 5x_2 & + x_3 & & & & & = 0
\end{array}
$$

on divise la 4ème ligne par 1

Application du pivot directement sur les tableaux :

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & x_1 & +\,3x_2 & +\;\;x_3 & +\,x_4 & & & & =3\\
 & -\;\;x_1 & & +\,3x_3 & & +\,x_5 & & & =2\\
 & 2x_1 & +\,4x_2 & -\;\;x_3 & & & +\,x_6 & & =4\\
 & x_1 & +\,3x_2 & -\;\;x_3 & & & & +\,x_7 & =2\\
-z\,+ & x_1 & +\,5x_2 & +\;\;x_3 & & & & & =0
\end{array}$$

pivot : x_1 entre et x_7 sort

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & 2x_3 & +\,x_4 & & & -\,x_7 & =1\\
 & -\;\;x_1 & & +\,3x_3 & & +\,x_5 & & & =2\\
 & 2x_1 & +\,4x_2 & -\;\;x_3 & & & +\,x_6 & & =4\\
 & x_1 & +\,3x_2 & -\;\;x_3 & & & & +\,x_7 & =2\\
-z\,+ & x_1 & +\,5x_2 & +\;\;x_3 & & & & & =0
\end{array}$$

on soustrait de la 1ère ligne la 4ème

Application du pivot directement sur les tableaux :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & =3\\
 & -x_1 & & +3x_3 & & +x_5 & & & =2\\
 & 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & =4\\
 & x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & & +x_7 & =2\\
-z+ & x_1 & +5x_2 & +x_3 & & & & & =0
\end{array}$$

pivot : x_1 entre et x_7 sort

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & & & 2x_3 & +x_4 & & & -x_7 & =1\\
 & & 3x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & +x_7 & =4\\
 & 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & =4\\
 & x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & & +x_7 & =2\\
-z+ & x_1 & +5x_2 & +x_3 & & & & & =0
\end{array}$$

on soustrait de la 2ème ligne -1 fois la 4ème

Application du pivot directement sur les tableaux :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & = 3 \\
 & -x_1 & & +3x_3 & & +x_5 & & & = 2 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 4 \\
 & x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & & +x_7 & = 2 \\
-z & +x_1 & +5x_2 & +x_3 & & & & & = 0
\end{array}$$

pivot : x_1 entre et x_7 sort

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & & 2x_3 & +x_4 & & & -x_7 & = 1 \\
 & & 3x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & +x_7 & = 4 \\
 & & -2x_2 & +x_3 & & & +x_6 & -2x_7 & = 0 \\
 & x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & & +x_7 & = 2 \\
-z & +x_1 & +5x_2 & +x_3 & & & & & = 0
\end{array}$$

on soustrait de la 3ème ligne 2 fois la 4ème

Application du pivot directement sur les tableaux :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & x_1 & + 3x_2 & + x_3 & + x_4 & & & & = 3 \\
- & x_1 & & + 3x_3 & & + x_5 & & & = 2 \\
 & 2x_1 & + 4x_2 & - x_3 & & & + x_6 & & = 4 \\
 & x_1 & + 3x_2 & - x_3 & & & & + x_7 & = 2 \\
-z + & x_1 & + 5x_2 & + x_3 & & & & & = 0
\end{array}
$$

pivot : x_1 entre et x_7 sort

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & & & 2x_3 & + x_4 & & & - x_7 & = 1 \\
 & & 3x_2 & + 2x_3 & & + x_5 & & + x_7 & = 4 \\
 & & - 2x_2 & + x_3 & & & + x_6 & - 2x_7 & = 0 \\
 & x_1 & + 3x_2 & - x_3 & & & & + x_7 & = 2 \\
-z & & + 2x_2 & + 2x_3 & & & & - x_7 & = -2
\end{array}
$$

on soustrait de la 5ème ligne 1 fois la 4ème

Notation en tableau (5/5)

D'un point de vue informatique, stocker uniquement les nombres, pas les chaînes de caractères x_i :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & & 2x_3 & +\, x_4 & & & -\ \ x_7 & = & 1 \\
 & 3x_2 & +\, 2x_3 & & +\, x_5 & & +\ \ x_7 & = & 4 \\
 & -\, 2x_2 & +\ \ x_3 & & & +\, x_6 & -\, 2x_7 & = & 0 \\
x_1 & +\, 3x_2 & -\ \ x_3 & & & & +\ \ x_7 & = & 2 \\
-z & +\, 2x_2 & +\, 2x_3 & & & & -\ \ x_7 & = & -2
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ tableau stocké sous forme informatique :

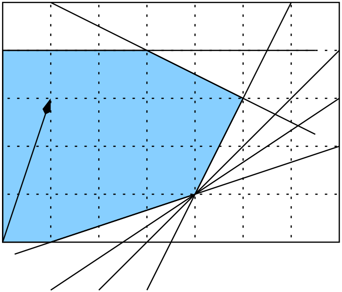
$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2
\end{array}$$

Algorithme du simplexe : 1ère version

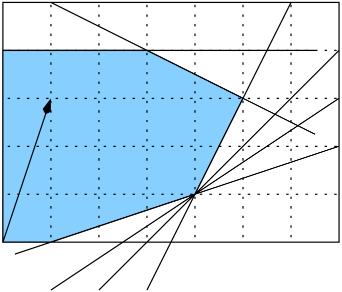
1. examiner s'il existe un nombre positif sur la dernière ligne (excepté la dernière colonne qui vaut $-z$). S'il n'y en a pas, aller en 6. sinon, soit j l'index d'une de ces colonnes
2. pour chaque ligne, soit s le nombre dans la colonne la plus à droite et r le nombre dans la colonne j. Déterminer la ligne i ayant le plus petit ratio $s/r \geq 0$. Si les r de toutes les lignes sont négatives ou nulles, aller en 7
3. diviser la ligne i par son coefficient r
4. pour toutes les lignes $\neq i$, soit k le nombre stocké sur cette ligne à la colonne j. soustraire à la ligne k fois la ligne i
5. revenir en 1
6. on est à l'optimum. Les nombres égaux à 0 sur la dernière ligne (excepté la dernière colonne) déterminent la solution optimale.
7. Le problème n'est pas borné, i.e., le max de la fonction objectif est $+\infty$.

Interprétation géométrique de l'algorithme (1/8)

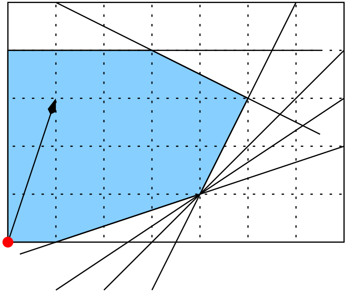
$$\max x_1 + 3x_2$$
$$s.c. \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & x_2 & + x_3 & & & & & & = 4 \\
 & x_1 & - 3x_2 & & + x_4 & & & & & = 1 \\
 & 2x_1 & - 3x_2 & & & + x_5 & & & & = 5 \\
 & x_1 & - x_2 & & & & + x_6 & & & = 3 \\
 & 2x_1 & - x_2 & & & & & + x_7 & & = 7 \\
 & x_1 & + 2x_2 & & & & & & + x_8 & = 11 \\
 -z + & x_1 & + 3x_2 & & & & & & & = 0
\end{array}
$$

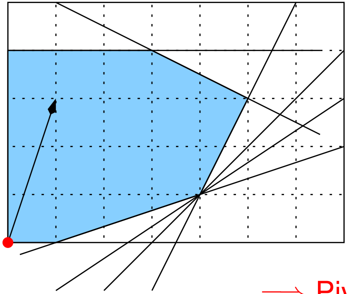


$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & & x_2 & + x_3 & & & & & & = & 4 \\
 & x_1 & - 3x_2 & & + x_4 & & & & & = & 1 \\
 & 2x_1 & - 3x_2 & & & + x_5 & & & & = & 5 \\
 & x_1 & - x_2 & & & & + x_6 & & & = & 3 \\
 & 2x_1 & - x_2 & & & & & + x_7 & & = & 7 \\
 & x_1 & + 2x_2 & & & & & & + x_8 & = & 11 \\
-z + & x_1 & + 3x_2 & & & & & & & = & 0
\end{array}
$$



base : $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$

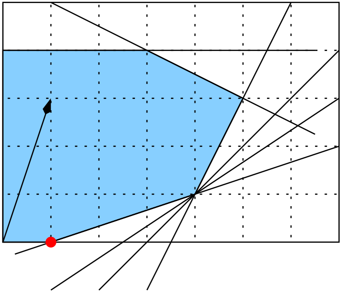
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcr}
 & & & & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & = & 4\\
 & & x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & & & = & 1\\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & & & = & 5\\
 & & x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & x_6 & & & & & = & 3\\
 & & 2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & & & = & 7\\
 & & x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & & & & & + & x_8 & = & 11\\
-z & + & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & & & & & & = & 0
\end{array}$$



base : $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$

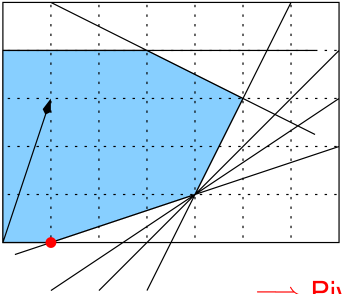
$\Longrightarrow$ Pivot : on fait entrer x_1 et sortir x_4

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & & x_2 & + x_3 & & & & & & = & 4 \\
 & x_1 & - 3x_2 & & + x_4 & & & & & = & 1 \\
 & & 3x_2 & & - 2x_4 & + x_5 & & & & = & 3 \\
 & & 2x_2 & & - x_4 & & + x_6 & & & = & 2 \\
 & & 5x_2 & & - 2x_4 & & & + x_7 & & = & 5 \\
 & & 5x_2 & & - x_4 & & & & + x_8 & = & 10 \\
-z & & + 6x_2 & & - x_4 & & & & & = & -1
\end{array}
$$



base : $x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8$

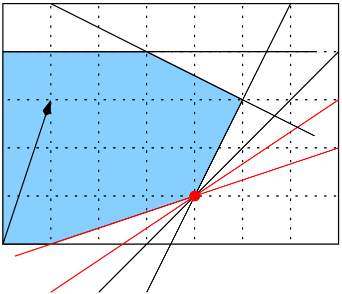
$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & x_2 + x_3 & & & & & & = & 4 \\
 & x_1 & - 3x_2 & + x_4 & & & & & = & 1 \\
 & & 3x_2 & - 2x_4 & + x_5 & & & & = & 3 \\
 & & 2x_2 & - x_4 & & + x_6 & & & = & 2 \\
 & & 5x_2 & - 2x_4 & & & + x_7 & & = & 5 \\
 & & 5x_2 & - x_4 & & & & + x_8 & = & 10 \\
-z & & + 6x_2 & - x_4 & & & & & = & -1
\end{array}
$$



base : $x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8$

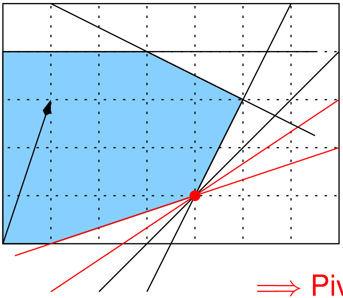
$\Longrightarrow$ Pivot : on fait entrer x_2 et sortir x_5

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 & = & 3 \\
x_1 - x_4 + x_5 & = & 4 \\
x_2 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & = & 1 \\
\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 & = & 0 \\
\frac{4}{3}x_4 - \frac{5}{3}x_5 + x_7 & = & 0 \\
\frac{7}{3}x_4 - \frac{5}{3}x_5 + x_8 & = & 5 \\
-z + 3x_4 - 2x_5 & = & -7
\end{array}
$$



base : $x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_8$

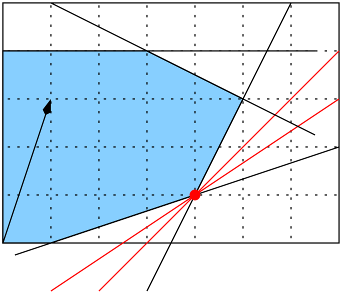
$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcl}
 & & & & x_3 & + & \frac{2}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & & & & & & & = & 3 \\
 & x_1 & & & & - & x_4 & + & x_5 & & & & & & & = & 4 \\
 & & x_2 & & & - & \frac{2}{3}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & & & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{2}{3}x_5 & + & x_6 & & & & & = & 0 \\
 & & & & & & \frac{4}{3}x_4 & - & \frac{5}{3}x_5 & & & + & x_7 & & & = & 0 \\
 & & & & & & \frac{7}{3}x_4 & - & \frac{5}{3}x_5 & & & & & + & x_8 & = & 5 \\
-z & & & & & + & 3x_4 & - & 2x_5 & & & & & & & = & -7
\end{array}
$$



base : $x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_8$

$\Longrightarrow$ Pivot : on fait entrer x_4 et sortir x_6

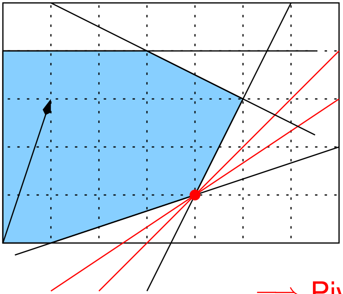
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
 & & x_3 & + & x_5 & - & 2x_6 & & & = & 3 \\
x_1 & & & - & x_5 & + & 3x_6 & & & = & 4 \\
 & x_2 & & - & x_5 & + & 2x_6 & & & = & 1 \\
 & & x_4 & - & 2x_5 & + & 3x_6 & & & = & 0 \\
 & & & & x_5 & - & 4x_6 & + x_7 & & = & 0 \\
 & & & & 3x_5 & - & 7x_6 & & + x_8 & = & 5 \\
-z & & & + & 4x_5 & - & 9x_6 & & & = & -7
\end{array}$$



base : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8$

dégénérescence ! ! ! ! !

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 + x_5 - 2x_6 & = & 3 \\
x_1 - x_5 + 3x_6 & = & 4 \\
x_2 - x_5 + 2x_6 & = & 1 \\
x_4 - 2x_5 + 3x_6 & = & 0 \\
x_5 - 4x_6 + x_7 & = & 0 \\
3x_5 - 7x_6 + x_8 & = & 5 \\
-z + 4x_5 - 9x_6 & = & -7
\end{array}
$$

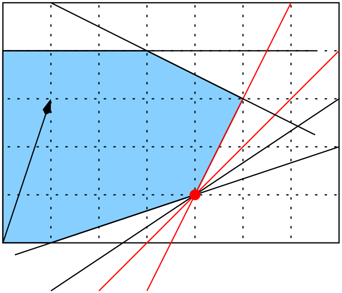


base : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8$

dégénérescence ! ! ! ! !

$\Longrightarrow$ Pivot : on fait entrer x_5 et sortir x_7

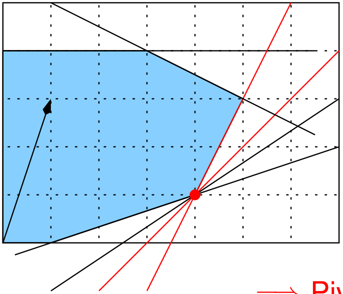
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcr}
 & & & & x_3 & & & & & - & 2x_6 & - & x_7 & & & = & 3 \\
 & x_1 & & & & & & & & - & x_6 & + & x_7 & & & = & 4 \\
 & & x_2 & & & & & & & - & 2x_6 & + & x_7 & & & = & 1 \\
 & & & & & & x_4 & & & - & 5x_6 & + & 2x_7 & & & = & 0 \\
 & & & & & & & & x_5 & - & 4x_6 & + & x_7 & & & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & 5x_6 & - & 3x_7 & + & x_8 & = & 5 \\
-z & & & & & & & & & + & 7x_6 & - & 4x_7 & & & = & -7
\end{array}$$



base : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8$

⚠ dégénérescence ! ! ! ! !

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 - 2x_6 - x_7 & = & 3 \\
x_1 - x_6 + x_7 & = & 4 \\
x_2 - 2x_6 + x_7 & = & 1 \\
x_4 - 5x_6 + 2x_7 & = & 0 \\
x_5 - 4x_6 + x_7 & = & 0 \\
5x_6 - 3x_7 + x_8 & = & 5 \\
-z + 7x_6 - 4x_7 & = & -7
\end{array}
$$

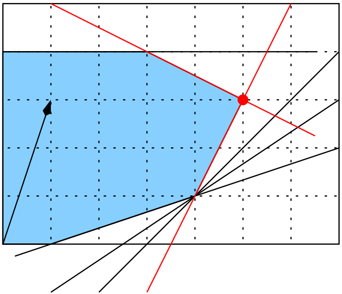


base : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8$

⚠ dégénérescence ! ! ! ! !

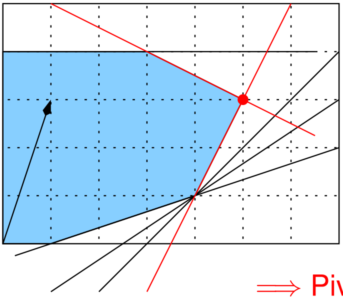
$\Longrightarrow$ Pivot : on fait entrer x_6 et sortir x_8

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
 & & x_3 & & & & + \frac{1}{5}x_7 & - \frac{2}{5}x_8 & = & 1 \\
 & x_1 & & & & & + \frac{2}{5}x_7 & + \frac{1}{5}x_8 & = & 5 \\
 & & x_2 & & & & - \frac{1}{5}x_7 & + \frac{2}{5}x_8 & = & 3 \\
 & & & x_4 & & & - x_7 & + x_8 & = & 5 \\
 & & & & x_5 & & - \frac{7}{5}x_7 & + \frac{4}{5}x_8 & = & 4 \\
 & & & & & x_6 & - \frac{3}{5}x_7 & + \frac{1}{5}x_8 & = & 1 \\
-z & & & & & & + \frac{1}{5}x_7 & - \frac{7}{5}x_8 & = & -14
\end{array}$$



base : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

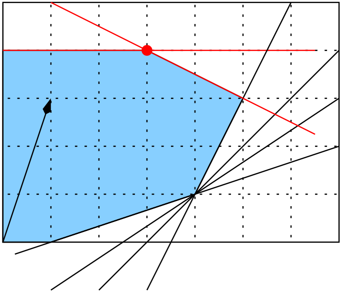
$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
 & & x_3 & & & & + \frac{1}{5}x_7 - \frac{2}{5}x_8 & = & 1 \\
 x_1 & & & & & & + \frac{2}{5}x_7 + \frac{1}{5}x_8 & = & 5 \\
 & x_2 & & & & & - \frac{1}{5}x_7 + \frac{2}{5}x_8 & = & 3 \\
 & & & x_4 & & & - x_7 + x_8 & = & 5 \\
 & & & & x_5 & & - \frac{7}{5}x_7 + \frac{4}{5}x_8 & = & 4 \\
 & & & & & x_6 & - \frac{3}{5}x_7 + \frac{1}{5}x_8 & = & 1 \\
 -z & & & & & & + \frac{1}{5}x_7 - \frac{7}{5}x_8 & = & -14
\end{array}
$$



base : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

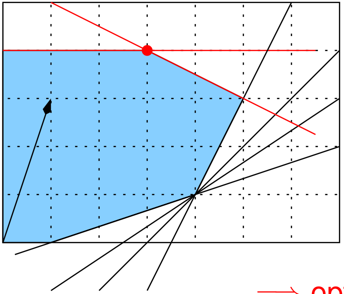
$\Longrightarrow$ Pivot : on fait entrer x_7 et sortir x_3

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & & 5x_3 & & & & + x_7 & - 2x_8 & = & 5 \\
 x_1 & & - 2x_3 & & & & & + x_8 & = & 3 \\
 & x_2 & + x_3 & & & & & & = & 4 \\
 & & 5x_3 & + x_4 & & & & - x_8 & = & 10 \\
 & & 7x_3 & & + x_5 & & & - 2x_8 & = & 11 \\
 & & 3x_3 & & & + x_6 & & - x_8 & = & 4 \\
 -z & & - x_3 & & & & & - x_8 & = & -15
\end{array}
$$



base : $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
 & & & & 5x_3 & & & & & & & + & x_7 & - & 2x_8 & = & 5 \\
 & x_1 & & - & 2x_3 & & & & & & & & & + & x_8 & = & 3 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & = & 4 \\
 & & & & 5x_3 & + & x_4 & & & & & & & - & x_8 & = & 10 \\
 & & & & 7x_3 & & & + & x_5 & & & & & - & 2x_8 & = & 11 \\
 & & & & 3x_3 & & & & & + & x_6 & & & - & x_8 & = & 4 \\
-z & & & - & x_3 & & & & & & & & & - & x_8 & = & -15
\end{array}
$$



base : $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7$

$\Longrightarrow$ optimum ! ! ! ! !

Choix des variables entrantes (1/3)

choisir une variable dont le coeff dans la fonction objectif est > 0

$\Longrightarrow$ règle ambiguë : plusieurs variables peuvent être candidates

But : choisir la variable pour minimiser le nombre d'itérations de l'algorithme

Choix des variables entrantes (1/3)

choisir une variable dont le coeff dans la fonction objectif est > 0

$\Longrightarrow$ règle ambiguë : plusieurs variables peuvent être candidates

But : choisir la variable pour minimiser le nombre d'itérations de l'algorithme

Règle du plus grand coefficient

Choisir de faire entrer la variable qui a le plus grand coefficient dans la fonction objectif

grand coeff $\Longrightarrow$ le taux d'augmentation de la fonction objectif est élevé

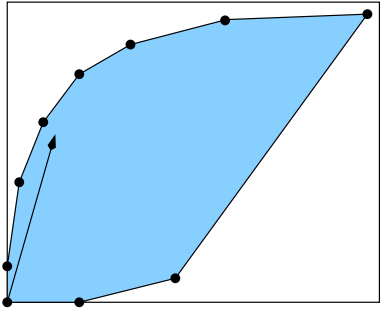
⚠ aucune garantie que ce soit optimal : la variable peut être contrainte à prendre une petite valeur $\Longrightarrow$ peu de variation de la fonction objectif

Choix des variables entrantes (2/3)

Règle du plus grand accroissement de z

Choisir de faire entrer la variable qui fait le plus augmenter la fonction objectif

⚠ aucune garantie que ce soit optimal : on peut faire beaucoup augmenter localement la fonction objectif et rester coincé plus tard :



La règle du plus grand coefficient est plus souvent utilisée que la règle du plus grand accroissement car elle est calculable plus rapidement

Choix des variables entrantes (3/3)

La règle du plus grand coefficient est plus souvent utilisée que la règle du plus grand accroissement car elle est calculable plus rapidement

Dégénérescence

Avec les deux règles précédentes, on peut cycler (boucler indéfiniment sur les mêmes itérations)