

Optimisation

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Objectifs du cours

Présentation des algorithmes fondamentaux d'optimisation

- **optimisation linéaire**
 - algorithme simplexe
 - dualité
 - applications
- **optimisation non linéaire**
 - méthodes de gradient
 - conditions de Kuhn et Tucker
 - programmation quadratique

Plan du cours (1/2)

Partie I : programmation linéaire

- 1 Forme générale, standard, canonique
- 2 L'algorithme du simplexe
- 3 Pièges du simplexe (dégénérescence...)
- 4 Phases I et II
- 5 Aspect géométrique : polyèdres ; points extrêmes
- 6 Dualité en programmation linéaire
- 7 Théorème d'existence et de dualité
- 8 Lemme de Minkowski-Farkas
- 9 Applications pratiques

Plan du cours (2/2)

Partie II : optimisation sans contraintes

- 1 Rappels d'optimisation sans contraintes
- 2 Optimisation uni-dimensionnelle
- 3 Méthodes de gradient et de gradient conjugué

Partie III : programmation non linéaire

- 1 Généralités : programmation convexe ; lagrangien
- 2 Théorème du col en programmation convexe
- 3 Conditions de Kuhn et Tucker en programmation convexe
- 4 Programmes quadratiques
- 5 Rappels sur les formes quadratiques.
Méthode de Wolfe en PQ
- 6 Programmation convexe à contraintes linéaires

Introduction à la programmation linéaire (1/5)

Problème : combien d'argent doit-on dépenser pour couvrir les besoins énergétiques (2000 Kcal), en protéines (55g) et en calcium (800mg) pour une journée ?

nourriture	taille	Kcal	protéines	calcium	prix
céréales	28g	110	4g	2mg	3
poulet	100g	205	32g	12mg	24
œufs	2	160	13g	54mg	13
lait	237cl	160	8g	285mg	9
clafoutis	170g	420	4g	22mg	20
cassoulet	260g	260	14g	80mg	19

Introduction à la programmation linéaire (2/5)

nourriture	taille	Kcal	protéines	calcium	prix
céréales	28g	110	4g	2mg	3
poulet	100g	205	32g	12mg	24
œufs	2	160	13g	54mg	13
lait	237cl	160	8g	285mg	9
clafoutis	170g	420	4g	22mg	20
cassoulet	260g	260	14g	80mg	19

Exemple : 10 rations de cassoulet \Rightarrow 2600Kcal, 140g de protéines, 800mg de calcium, prix = 190

Peut-on faire mieux ?

Introduction à la programmation linéaire (3/5)

nourriture	taille	Kcal	protéines	calcium	prix	quantité
céréales	28g	110	4g	2mg	3	x_1
poulet	100g	205	32g	12mg	24	x_2
œufs	2	160	13g	54mg	13	x_3
lait	237cl	160	8g	285mg	9	x_4
clafoutis	170g	420	4g	22mg	20	x_5
cassoulet	260g	260	14g	80mg	19	x_6

Problème : combien d'argent doit-on dépenser pour couvrir les besoins énergétiques (2000 Kcal), en protéines (55g) et en calcium (800mg) pour une journée ?

$$\begin{aligned} \min & 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6 \\ \text{s.c.} & \begin{cases} 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\ 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Introduction à la programmation linéaire (4/5)

Contraintes additionnelles pour menus variés :

nourriture	contrainte
céréales	au plus 4 rations par jour
poulet	au plus 3 rations par jour
œufs	au plus 2 rations par jour
lait	au plus 8 rations par jour
clafoutis	au plus 2 rations par jour
cassoulet	au plus 2 rations par jour

Nouveau Problème : combien d'argent doit-on dépenser pour couvrir les besoins énergétiques (2000 Kcal), en protéines (55g) et en calcium (800mg) pour une journée sous les contraintes ci-dessus ?

nourriture	contrainte
céréales	au plus 4 rations par jour
poulet	au plus 3 rations par jour
œufs	au plus 2 rations par jour
lait	au plus 8 rations par jour
clafoutis	au plus 2 rations par jour
cassoulet	au plus 2 rations par jour

$$\begin{aligned} & \min 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6 \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\ 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 3, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \\ 0 \leq x_4 \leq 8, \quad 0 \leq x_5 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Définition

programme linéaire = $\begin{cases} \text{fonction objectif linéaire} \\ \text{contraintes linéaires} \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \max 5x_1 - 2x_2 + 10x_4 \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} x_1 + 20x_2 + 20x_5 \geq 200 \\ \quad + 5x_2 + 5x_3 \leq 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 80 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Programme linéaire sous forme standard

Forme standard

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

Forme standard en notation matricielle

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



il existe différentes définitions !

Quelques définitions

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

- fonction objectif = $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$
- solution = un n -uplet (x_1, \dots, x_n)
- solution réalisable = solution vérifiant toutes les contraintes

Comment trouver la solution réalisable optimale ?

Exemple d'algorithme simplexe (1/7)

Problème à résoudre :

$$\begin{aligned} \max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- 1 introduire des « variables d'écart » pour remplacer les \leq par des $=$
- 2 appeler z la fonction objectif

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple d'algorithme simplexe (2/7)

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

résoudre $\max z$ s.c. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
 \iff résoudre problème d'origine

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable.

Idée force du simplexe

- 1 partir d'une solution réalisable x^0
- 2 étant donné une solution réalisable x^i , chercher une solution réalisable x^{i+1} « voisine » telle que z augmente
- 3 Revenir en 2 tant que l'on peut trouver un tel x^{i+1} . Sinon on a trouvé un optimum.

Exemple d'algorithme simplexe (3/7)

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable, $z = 0$

- si on augmente la valeur de x_1 , on augmente z
- si $x_1 = 2$ alors $(2, 0, 0, 1, 3, 2)$ réalisable et $z = 10$
- si $x_1 = 3$ alors $(3, 0, 0, -1, -1, -1)$ non réalisable

\implies ne pas trop augmenter x_1

Exemple d'algorithme simplexe (4/7)

Idée force


- choisir d'augmenter une variable ayant un coefficient positif dans z
- augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives

$$\begin{aligned}x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_4 &\Rightarrow x_1 \leq 5/2 = 2,5 \\x_5 &\Rightarrow x_1 \leq 11/4 = 2,75 \\x_6 &\Rightarrow x_1 \leq 8/3 \approx 2,66\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \min\{5/2, 11/4, 8/3\} = 5/2$$

Exemple d'algorithme simplexe (5/7)

 augmentation de la valeur d'une variable
 \Rightarrow annulation d'une autre

$$\begin{aligned}x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3\end{aligned}$$

$$x_1 = 5/2 \Rightarrow x_4 = 0$$

Idée force

- 1 Toujours placer à gauche des signe « $=$ » les variables $\neq 0$
- 2 Exprimer ces variables en fonction des variables = 0
 \Rightarrow exprimer x_1 en fonction des autres variables

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

Exemple d'algorithme simplexe (6/7)

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$\begin{aligned}x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\&= 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 \\&= 1 + 5x_2 + 2x_4\end{aligned}$$

faire le même calcul pour x_6 et z :


$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\z &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4\end{aligned}$$

\Rightarrow recommencer avec x_3

Exemple d'algorithme simplexe (7/7)

Après augmentation de x_3 :

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6\end{aligned}$$

 Tous les coefficients de z sont négatifs

\Rightarrow on est à l'optimum

Solution optimale : (2, 0, 1, 0, 1, 0)

- variables à gauche des signe = variables «en base»
- les autres = variables «hors base»
- base réalisable \iff solution correspondante réalisable

Premier algorithme du simplexe

- 1 Choisir une solution réalisable x^0
- 2 Exprimer les variables en base ($\neq 0$) en fonction des variables hors base ($= 0$)
- 3 s'il existe un coefficient positif dans z , soit x_i la variable correspondante, sinon aller en 7
- 4 calculer la valeur maximale de x_i de manière à ce que les variables en base restent positives ou nulles. Soit x_j une des variables en base qui s'annule
- 5 placer x_i dans l'ensemble des variables en base (faire entrer la variable en base) et x_j dans l'ensemble des variables hors base (faire sortir de la base)
- 6 retourner en 2
- 7 on est à l'optimum. Les variables en base définissent la solution optimale

Bibliographie

- V. Chvatal (1983) « *Linear Programming* », W.H. Freeman & Company.
- R. J. Vanderbei (1998) « *Linear Programming : Foundations and Extensions* », Kluwer Academic Publishers.
- M. Minoux (1983) « *Programmation mathématique, Théorie et Algorithmes* », Dunod.