Optimisation

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Objectifs du cours

Présentation des algorithmes fondamentaux d'optimisation

Objectifs du cours

Présentation des algorithmes fondamentaux d'optimisation

- optimisation linéaire
  - algorithme simplexe
  - dualité
  - applications

Objectifs du cours

Présentation des algorithmes fondamentaux d'optimisation

- optimisation linéaire
  - algorithme simplexe
  - dualité
  - applications
- optimisation non linéaire
  - méthodes de gradient
  - conditions de Kuhn et Tucker
  - programmation quadratique

Plan du cours (1/2)

Partie I : programmation linéaire

1. Forme générale, standard, canonique
2. L'algorithme du simplexe
3. Pièges du simplexe (dégénérescence. . .)
4. Phases I et II
5. Aspect géométrique : polyèdres ; points extrêmes
6. Dualité en programmation linéaire
7. Théorème d'existence et de dualité
8. Lemme de Minkowski-Farkas
9. Applications pratiques

Partie II : optimisation sans contraintes

1. Rappels d'optimisation sans contraintes
2. Optimisation uni-dimensionnelle
3. Méthodes de gradient et de gradient conjugué

Partie II : optimisation sans contraintes

1. Rappels d'optimisation sans contraintes
2. Optimisation uni-dimensionnelle
3. Méthodes de gradient et de gradient conjugué

Partie III : programmation non linéaire

1. Généralités : programmation convexe ; lagrangien
2. Théorème du col en programmation convexe
3. Conditions de Kuhn et Tucker en programmation convexe
4. Programmes quadratiques
5. Rappels sur les formes quadratiques.
   Méthode de Wolfe en PQ
6. Programmation convexe à contraintes linéaires

Problème : combien d'argent doit-on dépenser pour couvrir les besoins énergétiques (2000 Kcal), en protéines (55g) et en calcium (800mg) pour une journée ?

nourriture	taille	Kcal	protéines	calcium	prix
céréales	28g	110	4g	2mg	3
poulet	100g	205	32g	12mg	24
œufs	2	160	13g	54mg	13
lait	237cl	160	8g	285mg	9
clafoutis	170g	420	4g	22mg	20
cassoulet	260g	260	14g	80mg	19

nourriture	taille	Kcal	protéines	calcium	prix
céréales	28g	110	4g	2mg	3
poulet	100g	205	32g	12mg	24
œufs	2	160	13g	54mg	13
lait	237cl	160	8g	285mg	9
clafoutis	170g	420	4g	22mg	20
cassoulet	260g	260	14g	80mg	19

Exemple : 10 rations de cassoulet $\Longrightarrow$ 2600Kcal, 140g de protéines, 800mg de calcium, prix = 190

nourriture	taille	Kcal	protéines	calcium	prix
céréales	28g	110	4g	2mg	3
poulet	100g	205	32g	12mg	24
œufs	2	160	13g	54mg	13
lait	237cl	160	8g	285mg	9
clafoutis	170g	420	4g	22mg	20
cassoulet	260g	260	14g	80mg	19

Exemple : 10 rations de cassoulet $\Longrightarrow$ 2600Kcal, 140g de protéines, 800mg de calcium, prix = 190

Peut-on faire mieux ?

nourriture	taille	Kcal	protéines	calcium	prix	quantité
céréales	28g	110	4g	2mg	3	x_1
poulet	100g	205	32g	12mg	24	x_2
œufs	2	160	13g	54mg	13	x_3
lait	237cl	160	8g	285mg	9	x_4
clafoutis	170g	420	4g	22mg	20	x_5
cassoulet	260g	260	14g	80mg	19	x_6

Problème : combien d'argent doit-on dépenser pour couvrir les besoins énergétiques (2000 Kcal), en protéines (55g) et en calcium (800mg) pour une journée ?

$$\min 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{l} 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\ 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0,\ \ x_6 \geq 0 \end{array} \right.$$

Contraintes additionnelles pour menus variés :

nourriture	contrainte
céréales	au plus 4 rations par jour
poulet	au plus 3 rations par jour
œufs	au plus 2 rations par jour
lait	au plus 8 rations par jour
clafoutis	au plus 2 rations par jour
cassoulet	au plus 2 rations par jour

Contraintes additionnelles pour menus variés :

nourriture	contrainte
céréales	au plus 4 rations par jour
poulet	au plus 3 rations par jour
œufs	au plus 2 rations par jour
lait	au plus 8 rations par jour
clafoutis	au plus 2 rations par jour
cassoulet	au plus 2 rations par jour

Nouveau Problème : combien d’argent doit-on dépenser pour couvrir les besoins énergétiques (2000 Kcal), en protéines (55g) et en calcium (800mg) pour une journée sous les contraintes ci-dessus ?

nourriture	contrainte
céréales	au plus 4 rations par jour
poulet	au plus 3 rations par jour
œufs	au plus 2 rations par jour
lait	au plus 8 rations par jour
clafoutis	au plus 2 rations par jour
cassoulet	au plus 2 rations par jour

$$\min 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{l} 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\ 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 3, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \\ 0 \leq x_4 \leq 8, \quad 0 \leq x_5 \leq 2, \quad 0 \leq x_6 \leq 2 \end{array} \right.$$

Définition

$$\text{programme linéaire} = \begin{cases} \text{fonction objectif linéaire} \\ \text{contraintes linéaires} \end{cases}$$

$$\max 5x_1 - 2x_2 + 10x_4$$

$$s.c. \begin{cases} x_1 + 20x_2 + 20x_5 \geq 200 \\ + 5x_2 + 5x_3 \leq 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 80 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Programme linéaire sous forme standard

Forme standard

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Programme linéaire sous forme standard

Forme standard

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Forme standard en notation matricielle

$$\max c^T x$$

$$s.c. \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

⚠ il existe différentes définitions !

Quelques définitions

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

- fonction objectif = $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- solution = un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$
- solution réalisable = solution vérifiant toutes les contraintes

Comment trouver la solution réalisable optimale ?

Exemple d'algorithme simplexe (1/7)

Problème à résoudre :

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 5x_1 & + 4x_2 & + 3x_3 & & \\
s.c. & 2x_1 & + 3x_2 & + \ \ x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + \ \ x_2 & + 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 & + 4x_2 & + 2x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

1. introduire des «*variables d'écart*» *pour remplacer les* $\leq$ *par des* $=$
2. appeler z la fonction objectif

Exemple d'algorithme simplexe (1/7)

Problème à résoudre :

$$\begin{array}{llllll}
\max & 5x_1 & + 4x_2 & + 3x_3 & & \\
s.c. & 2x_1 & + 3x_2 & + \ \ x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + \ \ x_2 & + 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 & + 4x_2 & + 2x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 & \geq 0 &
\end{array}$$

1. introduire des «*variables d'écart*» *pour remplacer les* $\leq$ *par des* $=$
2. appeler z la fonction objectif

$$\begin{array}{lcl}
x_4 & = & 5 - 2x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 \\
x_5 & = & 11 - 4x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 \\
x_6 & = & 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z & = & \quad\ \ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

résoudre max z $\quad s.c. \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

$\Longleftrightarrow$ résoudre problème d'origine

Exemple d'algorithme simplexe (2/7)

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= \phantom{11 -{}} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

résoudre max z $\quad s.c.\ \ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
$\iff$ résoudre problème d'origine

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable.

Exemple d'algorithme simplexe (2/7)

$$\begin{aligned}
x_4 &= \;\;5 - 2x_1 - 3x_2 - \;\;x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - \;\;x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= \;\;8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z \;&= \qquad\; 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
x_1 &\geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0, \;\; x_4 \geq 0, \;\; x_5 \geq 0, \;\; x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

résoudre max $z \quad s.c. \;\; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

$\Longleftrightarrow$ résoudre problème d'origine

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable.

Idée force du simplexe

1. partir d'une solution réalisable x^0
2. étant donné une solution réalisable x^i, chercher une solution réalisable x^{i+1} «voisine» telle que z augmente
3. Revenir en 2 tant que l'on peut trouver un tel x^{i+1}. Sinon on a trouvé un optimum.

Exemple d'algorithme simplexe (3/7)

$$\begin{aligned}
x_4 &= \ \ 5 - 2x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= \ \ 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= \qquad \color{red}{5x_1} + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable, $z = 0$

- si on augmente la valeur de x_1, on augmente z

Exemple d'algorithme simplexe (3/7)

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= \phantom{11 -{}} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable, $z = 0$

- si on augmente la valeur de x_1, on augmente z
- si $x_1 = 2$ alors $(2, 0, 0, 1, 3, 2)$ réalisable et $z = 10$

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
x_1 &\geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0,\quad x_4 \geq 0,\quad x_5 \geq 0,\quad x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable, $z = 0$

- si on augmente la valeur de x_1, on augmente z
- si $x_1 = 2$ alors $(2, 0, 0, 1, 3, 2)$ réalisable et $z = 10$
- si $x_1 = 3$ alors $(3, 0, 0, -1, -1, -1)$ non réalisable

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= \phantom{11 - {}} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

$(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ = solution réalisable, $z = 0$

- si on augmente la valeur de x_1, on augmente z
- si $x_1 = 2$ alors $(2, 0, 0, 1, 3, 2)$ réalisable et $z = 10$
- si $x_1 = 3$ alors $(3, 0, 0, -1, -1, -1)$ non réalisable

$\Longrightarrow$ ne pas trop augmenter x_1

Exemple d'algorithme simplexe (4/7)

Idée force

- choisir d'augmenter une variable ayant un coefficient positif dans z
- augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives

Idée force

- choisir d'augmenter une variable ayant un coefficient positif dans z
- augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

Exemple d'algorithme simplexe (4/7)

Idée force

- choisir d'augmenter une variable ayant un coefficient positif dans z
- augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4 &\Longrightarrow x_1 \leq 5/2 = 2,5 \\
x_5 &\Longrightarrow x_1 \leq 11/4 = 2,75 \\
x_6 &\Longrightarrow x_1 \leq 8/3 \approx 2,66
\end{aligned}$$

Exemple d'algorithme simplexe (4/7)

Idée force

- choisir d'augmenter une variable ayant un coefficient positif dans z
- augmenter cette variable tant que les autres ne deviennent pas négatives

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4 &\Longrightarrow x_1 \leq 5/2 = 2,5 \\
x_5 &\Longrightarrow x_1 \leq 11/4 = 2,75 \\
x_6 &\Longrightarrow x_1 \leq 8/3 \approx 2,66
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x_1 = \min\{5/2, 11/4, 8/3\} = 5/2$$

⚠ augmentation de la valeur d'une variable
$\Longrightarrow$ annulation d'une autre

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$x_1 = 5/2 \Longrightarrow x_4 = 0$$

⚠ augmentation de la valeur d'une variable
$\Longrightarrow$ annulation d'une autre

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= \phantom{11 -{}} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$x_1 = 5/2 \Longrightarrow x_4 = 0$$

Idée force

1. Toujours placer à gauche des signe «=» les variables $\neq 0$
2. Exprimer ces variables en fonction des variables = 0

$\Longrightarrow$ exprimer x_1 en fonction des autres variables

Exemple d'algorithme simplexe (5/7)

⚠ augmentation de la valeur d'une variable
$\Longrightarrow$ annulation d'une autre

$$\begin{aligned}
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
\end{aligned}$$

$$x_1 = 5/2 \Longrightarrow x_4 = 0$$

Idée force

1. Toujours placer à gauche des signe «=» les variables $\neq 0$
2. Exprimer ces variables en fonction des variables = 0

$\Longrightarrow$ exprimer x_1 en fonction des autres variables

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ &= 11 - 4\left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 \\ &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ &= 11 - 4\left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 \\ &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \end{aligned}$$

faire le même calcul pour x_6 et z :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 \\ z &= \tfrac{25}{2} - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{5}{2}x_4 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ &= 11 - 4\left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 \\ &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \end{aligned}$$

faire le même calcul pour x_6 et z :

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 \\ z &= \tfrac{25}{2} - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{5}{2}x_4 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ recommencer avec x_3

Après augmentation de x_3 :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6
\end{aligned}
$$

Après augmentation de x_3 :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6
\end{aligned}
$$

⚠ Tous les coefficients de z sont négatifs

$\Longrightarrow$ on est à l'optimum

Après augmentation de x_3 :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6
\end{aligned}
$$

⚠ Tous les coefficients de z sont négatifs

$\Longrightarrow$ on est à l'optimum

Solution optimale : $(2, 0, 1, 0, 1, 0)$

L'algorithme du simplexe

- variables à gauche des signe = variables «en base»
- les autres = variables «hors base»
- base réalisable $\iff$ solution correspondante réalisable

L'algorithme du simplexe

- variables à gauche des signe = variables «en base»
- les autres = variables «hors base»
- base réalisable $\Longleftrightarrow$ solution correspondante réalisable

Premier algorithme du simplexe

1. Choisir une solution réalisable x^0
2. Exprimer les variables en base ($\neq 0$) en fonction des variables hors base ($= 0$)
3. s'il existe un coefficient positif dans z, soit x_i la variable correspondante, sinon aller en 7
4. calculer la valeur maximale de x_i de manière à ce que les variables en base restent positives ou nulles. Soit x_j une des variables en base qui s'annule
5. placer x_i dans l'ensemble des variables en base (faire entrer la variable en base) et x_j dans l'ensemble des variables hors base (faire sortir de la base)
6. retourner en 2
7. on est à l'optimum. Les variables en base définissent la solution optimale

Bibliographie

- V. Chvatal (1983) « *Linear Programming* », W.H. Freeman & Company.
- R. J. Vanderbei (1998) « *Linear Programming : Foundations and Extensions* », Kluwer Academic Publishers.
- M. Minoux (1983) « *Programmation mathématique, Théorie et Algorithmes* », Dunod.