

Examen de 2ème session du module MODE

C. Gonzales / P. Perny

Durée : 3 heures

*Seuls documents autorisés :
Les supports de cours et les calculatrices*

Exercice A (4 points – Fonctions de croyance)

Soit l'inverse de Möbius suivante :

| | \emptyset | A | B | C | D | A, B | A, C | A, D | B, C | B, D | C, D | A, B, C | A, B, D | A, C, D | B, C, D |
|--------|-------------|-----|-----|-----|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ϕ | 0 | 0,1 | 0 | 0,1 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0,1 | 0,2 | 0 | 0 |

Q A.1 Déterminez la fonction de croyance associée à cette inverse de Möbius.

| | \emptyset | A | B | C | D | A, B | A, C | A, D | B, C | B, D | C, D | A, B, C | A, B, D | A, C, D | B, C, D |
|--------|-------------|------|-----|------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ϕ | 0 | 0, 1 | 0 | 0, 1 | 0 | 0, 1 | 0, 1 | 0 | 0, 2 | 0, 1 | 0 | 0, 1 | 0, 2 | 0 | 0 |
| f | 0 | 0, 1 | 0 | 0, 1 | 0 | 0, 2 | 0, 3 | 0, 1 | 0, 3 | 0, 1 | 0, 1 | 0, 6 | 0, 3 | 0, 3 | 0, 4 |

Q A.2 Le décideur se fonde sur le critère BEU. Il a trois alternatives à sa disposition : d_1 , d_2 , d_3 . Chacune d'elles peut engendrer les conséquences X , Y ou Z . La fonction d'utilité u du décideur sur ces conséquences est la suivante :

| | \emptyset | $\{X\}$ | $\{Y\}$ | $\{Z\}$ | $\{X, Y\}$ | $\{X, Z\}$ | $\{Y, Z\}$ | $\{X, Y, Z\}$ |
|-----|-------------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|---------------|
| u | 0 | 10 | 20 | 30 | 50 | 80 | 100 | 120 |

Calculez la valeur de chacune des trois alternatives suivantes selon le critère BEU :

- d_1 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'un des événements A ou B se produit, Y si C se produit, et Z si D se produit.
- d_2 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'événement C se produit, Y si B ou D se produisent, et Z si A se produit.
- d_3 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'événement B se produit, Y si A se produit, et Z si C ou D se produisent.

Pour la décision d_1 , nous avons :

| | \emptyset | $\{X\}$ | $\{Y\}$ | $\{Z\}$ | $\{X, Y\}$ | $\{X, Z\}$ | $\{Y, Z\}$ | $\{X, Y, Z\}$ |
|--------|-------------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|---------------|
| | \emptyset | AB | C | D | ABC | ABD | CD | \mathcal{X} |
| μ | 0 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0,6 | 0,3 | 0,1 | 1 |
| ϕ | 0 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0,3 | 0,1 | 0 | 0,3 |

d'où $BEU(d_1) = 63$. Pour la décision d_2 , nous avons :

| | \emptyset | $\{X\}$ | $\{Y\}$ | $\{Z\}$ | $\{X, Y\}$ | $\{X, Z\}$ | $\{Y, Z\}$ | $\{X, Y, Z\}$ |
|--------|-------------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|---------------|
| | \emptyset | C | BD | A | BCD | AC | ABD | \mathcal{X} |
| μ | 0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,3 | 1 |
| ϕ | 0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,3 |

d'où $BEU(d_2) = 70$. Pour la décision d_3 , nous avons :

| | \emptyset | $\{X\}$ | $\{Y\}$ | $\{Z\}$ | $\{X, Y\}$ | $\{X, Z\}$ | $\{Y, Z\}$ | $\{X, Y, Z\}$ |
|--------|-------------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|---------------|
| | \emptyset | B | A | CD | AB | BCD | ACD | \mathcal{X} |
| μ | 0 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 1 |
| ϕ | 0 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,3 |

d'où $BEU(d_3) = 80$.

Exercice B (3 points – Décision avec un critère RDU)

Q B.1 Soit $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ un ensemble de conséquences. La relation de préférences $\succsim_{\mathcal{X}}$ du décideur sur \mathcal{X} coïncide avec la relation \geq . Soit deux loteries $P = \langle (x_1, p_1); \dots; (x_n, p_n) \rangle$ et $Q = \langle (y_1, p_1); \dots; (y_n, p_n) \rangle$ où les x_i et les y_i sont triés par ordre croissant de préférence sur l'espace des conséquences. Autrement dit, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i = y_i$ pour tout $i \neq i_0$, et tel que $y_{i_0} \in]x_{i_0}, x_{i_0+1}[$ si $i_0 < n$ et $y_{i_0} \in]x_{i_0}, +\infty[$ sinon. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P .

Q B.2 Soit deux loteries $P = \langle (x_1, p_1); \dots; (x_n, p_n) \rangle$ et $Q = \langle (x_1, q_1); \dots; (x_n, q_n) \rangle$ où les x_i sont triés par ordre croissant de préférence. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $p_i = q_i$ pour tout $i \notin \{i_0, i_0 + 1\}$, et tel que $q_{i_0} = p_{i_0} - \alpha$ et $q_{i_0+1} = p_{i_0+1} + \alpha$, pour un α strictement positif. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P .

Q B.3 Soit deux loteries $P = \langle (x_1, p_1); \dots; (x_n, p_n) \rangle$ et $Q = \langle (y_1, q_1); \dots; (y_n, q_n) \rangle$ où les x_i et les y_i sont triés par ordre croissant de préférence. Supposons que, pour tout i , $y_i \geq x_i$ et que $\sum_{k=i}^n q_k \geq \sum_{k=i}^n p_k$. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P .

Exercice C (3 pts – Mean Preserving Spread)

Soit les deux loteries :

$$P = \langle (5; 0, 15), (7; 0, 35), (9; 0, 35), (13; 0, 15) \rangle$$

$$Q = \langle (5; 0, 1), (6; 0, 1), (7; 0, 2), (8; 0, 2), (9; 0, 1), (10; 0, 1), (11; 0, 1), (12; 0, 1) \rangle$$

Q C.1 P est-il un mean preserving spread de Q ? Q est-il un mean preserving spread de P ? Vous justifierez votre réponse.

Pour que l'une des loteries soit un MPS de l'autre, il faut d'abord s'assurer que les deux loteries ont la même espérance. $E(P) = 8,3$ et $E(Q) = 8,3$. Il suffit maintenant de calculer pour tout T les intégrales $\int_{-\infty}^T F_P(X)dX$ et $\int_{-\infty}^T F_Q(X)dX$, où F_P et F_Q sont les cumulatives des probabilités P et Q . En fait, ici, on peut se limiter aux points T où les valeurs des conséquences changent.

| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|------------|---|------|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|
| $\int F_P$ | 0 | 0,15 | 0,3 | 0,8 | 1,3 | 2,15 | 3 | 3,85 | 4,7 |
| $\int F_Q$ | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,7 | 1,3 | 2 | 2,8 | 3,7 | 4,7 |

On en déduit donc que P est un MPS de Q .

Q C.2 Selon Rothschild et Stiglitz, un décideur adverse du risque préférerait-il P ou Q ?

Puisque $P = MPS(Q)$, un adversaire du risque préférerait la loterie Q .