Examen de 2ème session du module MODE

C. Gonzales / P. Perny

Durée : 3 heures

Seuls documents autorisés :
Les supports de cours et les calculatrices

Exercice A (4 points – Fonctions de croyance)

Soit l'inverse de Möbius suivante :

	$\emptyset$	A	B	C	D	A,B	A,C	A,D	B,C	B,D	C,D	A,B,C	A,B,D	A,C,D	B,C,D	$\mathcal{X}$
ϕ	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0,1	0	0,2	0,1	0	0,1	0,2	0	0	0

Q A.1 Déterminez la fonction de croyance associée à cette inverse de Möbius.

	$\emptyset$	A	B	C	D	A,B	A,C	A,D	B,C	B,D	C,D	A,B,C	A,B,D	A,C,D	B,C,D	$\mathcal{X}$
ϕ	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0,1	0	0,2	0,1	0	0,1	0,2	0	0	0
f	0	0,1	0	0,1	0	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1	0,1	0,6	0,3	0,3	0,4	1

Q A.2 Le décideur se fonde sur le critère BEU. Il a trois alternatives à sa disposition : d_1, d_2, d_3. Chacune d'elles peut engendrer les conséquences X, Y ou Z. La fonction d'utilité u du décideur sur ces conséquences est la suivante :

	$\emptyset$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Z\}$	$\{X,Y\}$	$\{X,Z\}$	$\{Y,Z\}$	$\{X,Y,Z\}$
u	0	10	20	30	50	80	100	120

Calculez la valeur de chacune des trois alternatives suivantes selon le critère BEU :
- d_1 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'un des événements A ou B se produit, Y si C se produit, et Z si D se produit.
- d_2 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'événement C se produit, Y si B ou D se produisent, et Z si A se produit.
- d_3 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'événement B se produit, Y si A se produit, et Z si C ou D se produisent.

Pour la décision d_1, nous avons :

	$\emptyset$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Z\}$	$\{X,Y\}$	$\{X,Z\}$	$\{Y,Z\}$	$\{X,Y,Z\}$
	$\emptyset$	AB	C	D	ABC	ABD	CD	$\mathcal{X}$
μ	0	0,2	0,1	0	0,6	0,3	0,1	1
ϕ	0	0,2	0,1	0	0,3	0,1	0	0,3

d'où BEU$(d_1) = 63$. Pour la décision d_2, nous avons :

	$\emptyset$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Z\}$	$\{X,Y\}$	$\{X,Z\}$	$\{Y,Z\}$	$\{X,Y,Z\}$
	$\emptyset$	C	BD	A	BCD	AC	ABD	$\mathcal{X}$
μ	0	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3	0,3	1
ϕ	0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,3

d'où BEU$(d_2) = 70$. Pour la décision d_3, nous avons :

	$\emptyset$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Z\}$	$\{X,Y\}$	$\{X,Z\}$	$\{Y,Z\}$	$\{X,Y,Z\}$
	$\emptyset$	B	A	CD	AB	BCD	ACD	$\mathcal{X}$
μ	0	0	0,1	0,1	0,2	0,4	0,3	1
ϕ	0	0	0,1	0,1	0,1	0,3	0,1	0,3

d'où BEU$(d_3) = 80$.

Exercice B (3 points – Décision avec un critère RDU)

Q B.1 Soit $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ un ensemble de conséquences. La relation de préférences $\succsim_{\mathcal{X}}$ du décideur sur $\mathcal{X}$ coïncide avec la relation $\geq$. Soit deux loteries $P = \langle(x_1, p_1); \dots; (x_n, p_n)\rangle$ et $Q = \langle(y_1, p_1); \dots; (y_n, p_n)\rangle$ où les x_i et les y_i sont triés par ordre croissant de preférence sur l'espace des conséquences. Autrement dit, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i = y_i$ pour tout $i \neq i_0$, et tel que $y_{i_0} \in]x_{i_0}, x_{i_0+1}[$ si $i_0 < n$ et $y_{i_0} \in]x_{i_0}, +\infty[$ sinon. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P.

Q B.2 Soit deux loteries $P = \langle(x_1, p_1); \dots; (x_n, p_n)\rangle$ et $Q = \langle(x_1, q_1); \dots; (x_n, q_n)\rangle$ où les x_i sont triés par ordre croissant de preférence. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $p_i = q_i$ pour tout $i \notin \{i_0, i_0+1\}$, et tel que $q_{i_0} = p_{i_0} - \alpha$ et $q_{i_0+1} = p_{i_0+1} + \alpha$, pour un α strictement positif. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P.

Q B.3 Soit deux loteries $P = \langle(x_1, p_1); \dots; (x_n, p_n)\rangle$ et $Q = \langle(y_1, q_1); \dots; (y_n, q_n)\rangle$ où les x_i et les y_i sont triés par ordre croissant de preférence. Supposons que, pour tout i, $y_i \geq x_i$ et que $\sum_{k=i}^n q_k \geq \sum_{k=i}^n p_k$. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P.

Exercice C (3 pts – Mean Preserving Spread)

Soit les deux loteries :

$P = \langle(5; 0,15), (7; 0,35), (9; 0,35), (13; 0,15)\rangle$

$Q = \langle(5; 0,1), (6; 0,1), (7; 0,2), (8; 0,2), (9; 0,1), (10; 0.1), (11; 0.1), (12; 0,1)\rangle$

Q C.1 P est-il un mean preserving spread de Q ? Q est-il un mean preserving spread de P ? Vous justifierez votre réponse.

Pour que l'une des loteries soit un MPS de l'autre, il faut d'abord s'assurer que les deux loteries ont la même espérance. $E(P) = 8,3$ et $E(Q) = 8,3$. Il suffit maintenant de calculer pour tout T les intégrales $\int_{-\infty}^T F_P(X)dX$ et $\int_{-\infty}^T F_Q(X)dX$, où F_P et F_Q sont les cumulatives des probabilités P et Q. En fait, ici, on peut se limiter aux points T où les valeurs des conséquences changent.

	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\int F_P$	0	$0,15$	$0,3$	$0,8$	$1,3$	$2,15$	3	$3,85$	$4,7$
$\int F_Q$	0	$0,1$	$0,3$	$0,7$	$1,3$	2	$2,8$	$3,7$	$4,7$

On en déduit donc que P est un MPS de Q.

Q C.2 Selon Rothschild et Stiglitz, un décideur adversaire du risque préférerait-il P ou Q ?

Puisque $P = MPS(Q)$, un adversaire du risque préférerait la loterie Q.