Examen de 2ème session du module MODE

C. Gonzales / P. Weng

Durée : 3 heures

Seuls documents autorisés :
Une feuille de papier format A4 recto/verso.

Exercice A (3 pts – Mean Preserving Spread)

Soit les deux loteries :

$P = \langle(6; 0,15), (14; 0,15), (20; 0,3), (30; 0,1), (40; 0,15), (50; 0,1), (80; 0,05)\rangle$

$Q = \langle(6; 0,15), (11; 0,1), (20; 0,4), (40; 0,25), (60; 0,05), (80; 0,05)\rangle$

Q A.1 P est-il un mean preserving spread de Q ? Q est-il un mean preserving spread de P ? Vous justifierez votre réponse.

Pour que l'une des loteries soit un MPS de l'autre, il faut d'abord s'assurer que les deux loteries ont la même espérance. $E(P) = 27$ et $E(Q) = 27$. Il suffit maintenant de calculer pour tout T les intégrales $\int_{-\infty}^{T} F_P(X)dX$ et $\int_{-\infty}^{T} F_Q(X)dX$, où F_P et F_Q sont les cumulatives des probabilités P et Q. En fait, ici, on peut se limiter aux points T où les valeurs des conséquences changent.

	6	11	14	20	30	40	50	60	80
$\int F_P$	0	0,75	1,2	3	9,0	16	24,5	34	53
$\int F_q$	0	0,75	1,5	3	9,5	16	25,0	34	53

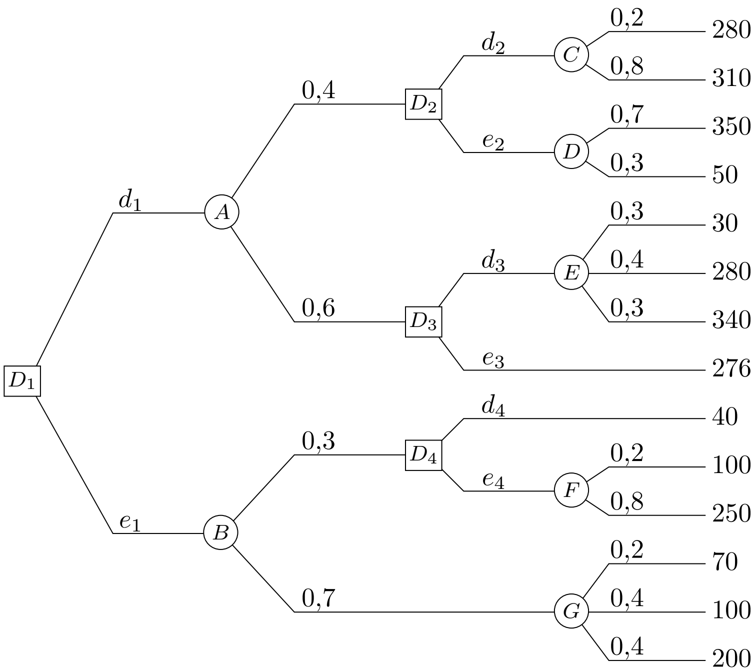
On en déduit donc que Q est un MPS de P.

Q A.2 Selon Rothschild et Stiglitz, un décideur adversaire du risque préférerait-il P ou Q ?

Puisque $Q = MPS(P)$, un adversaire du risque préférerait la loterie P.

Exercice B (3 pts – Rank Dependent Utility)

Soit l'arbre de décision suivant dans lequel sont notées sur les feuilles les utilités des conséquences, et sur les autres branches les probabilités d'apparition des événements :



On suppose que le décideur est maximisateur RDU et que sa fonction φ de déformation des probabilités est donnée dans le tableau suivant :

p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$
0	0	0,18	0,4	0,2	0,45	0,24	0,5	0,28	0,53	0,3	0,57
0,32	0,58	0,35	0,6	0,4	0,62	0,46	0,68	0,5	0,7	0,52	0,72
0,56	0,75	0,6	0,76	0,64	0,8	0,68	0,83	0,7	0,85	0,74	0,86
0,8	0,87	0,82	0,9	0,86	0,92	0,88	0,93	0,92	0,95	1	1

Q B.1 Quelles sont, selon RDU, les stratégies optimales dans les sous-arbres de racines D_2, D_3, D_4 ? Vous indiquerez la valeur RDU de ces stratégies.

Q B.2 Quelle est, selon RDU, la stratégie optimale à la racine de l'arbre de décision ? Vous indiquerez la valeur RDU de cette stratégie.

Exercice C (4 points – Fonctions de croyance)

Afin de procéder à un sondage, une population a été divisée en 3 sous-populations A, B, et C contenant chacune 100 personnes. Chaque individu devait donner son avis sur la qualité d'un produit ménager. Les avis sont classés en quatre catégories : (M)auvais, (P)assable, (B)on, (T)rès bon. Certaines personnes hésitaient entre plusieurs catégories, aussi le résultat du sondage est-il imprécis. Voici les résultats obtenus. Dans la population A, 30 personnes ont trouvé le produit (M)auvais, 10 pensent qu'il est (P)assable et les 60 autres personnes pensent qu'il est (B)on voire (T)rès bon. Dans la population B, 30 personnes pensent que le produit est (B)on, 30 autres l'ont trouvé (T)rès bon et le reste de la population a hésité entre (M)auvais et (P)assable. Enfin, dans la population C, 20 personnes ont jugé le produit de (M)auvaise qualité, 30 l'ont jugé (T)rès bon, et le reste de la population l'a jugé entre (P)assable et (B)on.

Q C.1 Déterminez la fonction de croyance compatible avec ces informations.

	$\emptyset$	M	P	B	T	M,P	M,B	M,T	P,B	P,T	B,T	M,P,B	M,P,T	M,B,T	P,B,T	$\mathcal{X}$
f	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{80}{300}$	$\frac{110}{300}$	$\frac{90}{300}$	$\frac{70}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{180}{300}$	$\frac{160}{300}$	$\frac{200}{300}$	$\frac{210}{300}$	1

Q C.2 Calculez l'inverse de Möbius ϕ de f.

	$\emptyset$	M	P	B	T	M,P	M,B	M,T	P,B	P,T	B,T	M,P,B	M,P,T	M,B,T	P,B,T	$\mathcal{X}$
f	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{80}{300}$	$\frac{110}{300}$	$\frac{90}{300}$	$\frac{70}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{180}{300}$	$\frac{160}{300}$	$\frac{200}{300}$	$\frac{210}{300}$	1
ϕ	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{40}{300}$	0	0	$\frac{50}{300}$	0	$\frac{60}{300}$	0	0	0	0	0

f est une fonction de croyance car tous les ϕ sont positifs ou nuls et $\sum_A \phi(A) = 1$.

Q C.3 En se fondant sur le critère BEU, laquelle des trois décisions ci-dessous doit-on préférer :

– d_1 : on commercialise le produit à bas prix. Si le public trouve globalement que le produit est (M)auvais, ce sera un échec commercial (conséquence E), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_1 du décideur est la suivante :

	E	S	$\{E,S\}$
w_1	0	100	70

– d_2 : on commercialise le produit à un prix moyen. Si le public trouve globalement que le produit est (M)auvais ou (P)assable, ce sera un échec commercial (conséquence E), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_2 du décideur est la suivante :

	E	S	$\{E,S\}$
w_2	0	120	50

– d_3 : on commercialise le produit à un prix élevé. Si le public trouve globalement que le produit est (T)rès bon, ce sera un succès commercial (conséquence S), sinon ce sera un échec commercial (conséquence E). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_3 du décideur est la suivante :

	E	S	$\{E,S\}$
w_3	0	150	30

On commence par traduire les événements E, S, $\{E,S\}$ en termes d'événements de $\mathcal{X}$:

	E	S	$\{E,S\}$
	M	$\{P,B,T\}$	$\mathcal{X}$
w_1	0	100	70
f	$\frac{50}{300}$	$\frac{210}{300}$	1
ϕ	$\frac{50}{300}$	$\frac{210}{300}$	$\frac{40}{300}$

	E	S	$\{E,S\}$
	$\{M,P\}$	$\{B,T\}$	$\mathcal{X}$
w_2	0	120	50
f	$\frac{100}{300}$	$\frac{150}{300}$	1
ϕ	$\frac{100}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{50}{300}$

	E	S	$\{E,S\}$
	$\{M,P,B\}$	T	$\mathcal{X}$
w_3	0	150	30
f	$\frac{180}{300}$	$\frac{60}{300}$	1
ϕ	$\frac{180}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{60}{300}$

Maintenant, on peut appliquer BEU :

$$BEU(d_1) = \tfrac{50}{300} \times 0 + \tfrac{210}{300} \times 100 + \tfrac{40}{300} \times 70 = \tfrac{238}{3}.$$
$$BEU(d_2) = \tfrac{100}{300} \times 0 + \tfrac{150}{300} \times 120 + \tfrac{50}{300} \times 50 = \tfrac{205}{3}.$$
$$BEU(d_2) = \tfrac{180}{300} \times 0 + \tfrac{60}{300} \times 150 + \tfrac{60}{300} \times 30 = \tfrac{108}{3}.$$

La décision optimale est donc d_1.