Examen de 2ème session du module MODE

C. Gonzales / P. Perny

Durée : 3 heures

Exercice A (2.5 pts – Mean Preserving Spread)

Soit les deux loteries :

$P = \langle(6; 0,15), (14; 0,15), (20; 0,3), (30; 0,1), (40; 0,15), (50; 0,1), (80; 0,05)\rangle$

$Q = \langle(6; 0,15), (11; 0,1), (20; 0,4), (40; 0,25), (60; 0,05), (80; 0,05)\rangle$

Q A.1 P est-il un mean preserving spread de Q ? Q est-il un mean preserving spread de P ? Vous justifierez votre réponse.

Pour que l'une des loteries soit un MPS de l'autre, il faut d'abord s'assurer que les deux loteries ont la même espérance. $E(P) = 27$ et $E(Q) = 27$. Il suffit maintenant de calculer pour tout T les intégrales $\int_{-\infty}^{T} F_P(X)dX$ et $\int_{-\infty}^{T} F_Q(X)dX$, où F_P et F_Q sont les cumulatives des probabilités P et Q. En fait, ici, on peut se limiter aux points T où les valeurs des conséquences changent.

	6	11	14	20	30	40	50	60	80
$\int F_P$	0	0,75	1,2	3	9,0	16	24,5	34	53
$\int F_q$	0	0,75	1,5	3	9,5	16	25,0	34	53

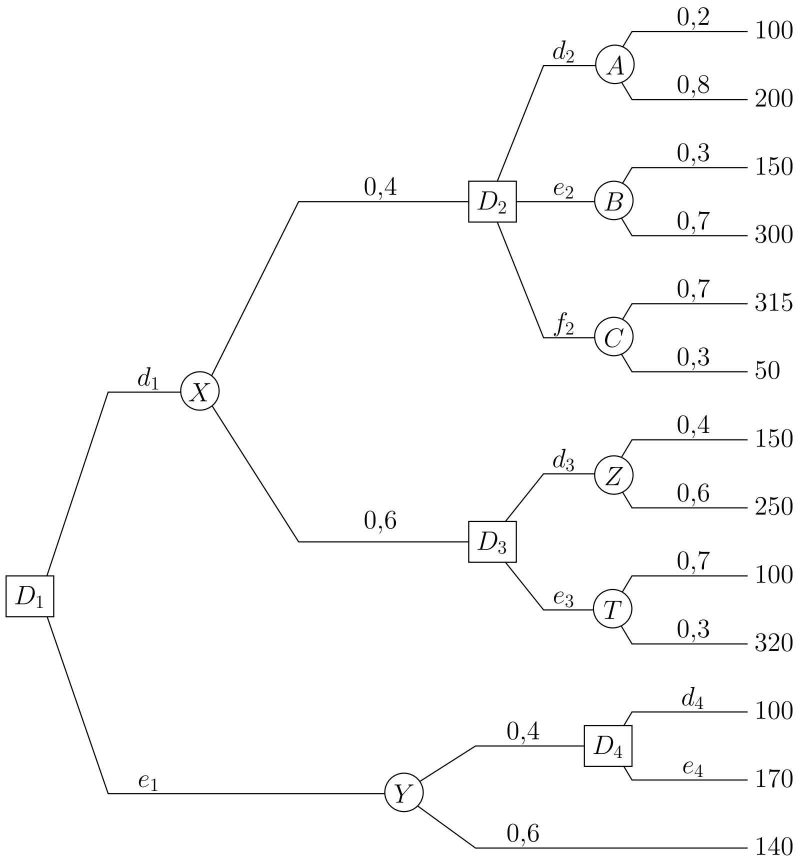
On en déduit donc que Q est un MPS de P.

Q A.2 Selon Rothschild et Stiglitz, un décideur adversaire du risque préférerait-il P ou Q ?

Puisque $Q = MPS(P)$, un adversaire du risque préférerait la loterie P.

Exercice B (2.5 pts – Rank Dependent Utility)

Soit l'arbre de décision :



et soit la fonction de transformation de probabilités :

p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$
0	0	0,08	0,3	0,12	0,3	0,18	0,4	0,24	0,5	0,28	0,53
0,3	0,58	0,32	0,59	0,36	0,6	0,4	0,65	0,42	0,66	0,46	0,68
0,5	0,7	0,58	0,75	0,6	0,76	0,64	0,8	0,68	0,83	0,7	0,85
0,8	0,9	0,88	0,93	0,9	0,94	0,92	0,95	0,98	0,98	1	1

On suppose que l'utilité sur les conséquences est égale à l'identité $u(x) = x$.
Quelle est la stratégie optimale à la racine de l'arbre de décision selon le critère RDU ?

$$
\begin{aligned}
RDU(d_1d_2d_3) &= 100 + \varphi(0,92)[150 - 100] + \varphi(0,68)[200 - 150] + \varphi(0,36)[250 - 200] = 219 \\
RDU(d_1d_2e_3) &= 100 + \varphi(0,5)[200 - 100] + \varphi(0,18)[320 - 200] = 218 \\
RDU(d_1e_2d_3) &= 150 + \varphi(0,64)[250 - 150] + \varphi(0,28)[300 - 250] = 256,5 \\
RDU(d_1e_2e_3) &= 100 + \varphi(0,58)[150 - 100] + \varphi(0,46)[300 - 150] + \varphi(0,18)[320 - 300] = 247, \\
RDU(d_1f_2d_3) &= 50 + \varphi(0,88)[150 - 50] + \varphi(0,64)[250 - 150] + \varphi(0,28)[315 - 250] = 257,45 \\
RDU(d_1f_2e_3) &= 50 + \varphi(0,88)[100 - 50] + \varphi(0,46)[315 - 100] + \varphi(0,18)[320 - 315] = 244,7 \\
RDU(e_1d_4) &= 100 + \varphi(0,6)[140 - 100] = 130,4 \\
RDU(e_1e_4) &= 140 + \varphi(0,4)[170 - 140] = 159,5
\end{aligned}
$$

La stratégie optimale à la racine est donc $D_1 = d_1, D_2 = f2, D_3 = d3$.

Exercice C (5 points – Fonctions de croyance)

On réalise des tests pour déterminer l'efficacité d'un nouvel engrais. Pour cela, on a ajouté cet engrais à la terre de 3 serres A, B et C contenant chacune 100 arbres. Trois mois plus tard, on a mesuré de quelle hauteur les arbres des 3 serres avaient grandi et on a classé ces mesures en 4 catégories : croissance (I)nsuffisante, (T)rès moyenne, (M)oyenne et (E)levée. Les appareils de mesure étant délicats à déplacer, chaque serre possède son propre appareil. De plus, ces appareils sont peu précis. Voici les résultats obtenus :

- Dans la serre A, 20 arbres ont eu une croissance (I)nsuffisante et 30 ont eu une croissance (E)levée. L'appareil étant imprécis, on sait seulement que les arbres restants ont eu une croissance (M)oyenne voire (T)rès moyenne.
- Dans la serre B, 30 arbres ont eu une croissance (I)nsuffisante, 10 arbres ont eu une croissance (T)rès moyenne, les arbres restants ont eu une croissance (M)oyenne voire (E)levée.
- Dans la serre C, 30 arbres ont eu une croissance (M)oyenne, 30 arbres ont eu une croissance (E)levée, et les arbres restants ont eu une croissance (I)nsuffisante ou (T)rès moyenne.

Q C.1 En supposant que l'univers est représenté par l'ensemble des trois serres, donnez une expression de l'ensemble des lois de probabilités $\mathcal{P}$ compatibles avec les informations ci-dessus.

Les événements élémentaires sont ici : $\mathcal{X} = \{I, T, M, E\}$.
Les informations ci-dessus peuvent être résumées de la manière suivante :

<table>
<tr><th></th><th>I</th><th>T</th><th>M</th><th>E</th></tr>
<tr><td>Serre A :</td><td>20</td><td colspan="2">50</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Serre B :</td><td>30</td><td>10</td><td colspan="2">60</td></tr>
<tr><td>Serre C :</td><td colspan="2">40</td><td>30</td><td>30</td></tr>
</table>

Notons $\alpha = P(I)$, $\beta = P(T)$, $\gamma = P(M)$ et $\delta = P(E)$. L'ensemble $\mathcal{P}$ des lois de probas compatibles est donc l'ensemble des lois vérifiant :

$$(P) \quad \begin{cases} \alpha \geq 50/300 & \alpha + \beta \geq 100/300 \\ \beta \geq 10/300 & \beta + \gamma \geq 90/300 \\ \gamma \geq 30/300 & \gamma + \delta \geq 150/300 \\ \delta \geq 60/300 & \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \end{cases}$$

Q C.2 Montrez que $\mathcal{P}$ est non vide.

$\{\alpha = 50/300, \beta = 50/300, \gamma = 50/300, \delta = 150/300\} \in \mathcal{P}$.

Q C.3 Calculez l'enveloppe inférieure f de $\mathcal{P}$ et montrez que $\mathcal{P} = \{$ lois de probas $P : P \geq f\}$.

	$\emptyset$	I	T	M	E	I,T	I,M	I,E	T,M	T,E	M,E	I,T,M	I,T,E	I,M,E	T,M,E
f	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{80}{300}$	$\frac{110}{300}$	$\frac{90}{300}$	$\frac{70}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{180}{300}$	$\frac{160}{300}$	$\frac{200}{300}$	$\frac{210}{300}$

Q C.4 Calculez l'inverse de Möbius ϕ de f. Montrez que f est une fonction de croyance.

	$\emptyset$	I	T	M	E	I,T	I,M	I,E	T,M	T,E	M,E	I,T,M	I,T,E	I,M,E	T,M,E
f	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{80}{300}$	$\frac{110}{300}$	$\frac{90}{300}$	$\frac{70}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{180}{300}$	$\frac{160}{300}$	$\frac{200}{300}$	$\frac{210}{300}$
ϕ	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{40}{300}$	0	0	$\frac{50}{300}$	0	$\frac{60}{300}$	0	0	0	0

f est une fonction de croyance car tous les ϕ sont positifs ou nuls et $\sum_A \phi(A) = 1$.

Q C.5 En se fondant sur le critère BEU, laquelle des trois décisions ci-dessous doit-on préférer :

– d_1 : on commercialise l'engrais à bas prix. Si l'engrais s'avère produire une croissance (I)nsuffisante, ce sera un échec commercial (conséquence R), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_1 du décideur est la suivante :

	R	S	$\{R,S\}$
w_1	0	100	70

– d_2 : on commercialise l'engrais à un prix moyen. Si l'engrais s'avère produire une croissance (I)nsuffisante ou (T)rès moyenne, ce sera un échec commercial (conséquence R), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_2 du décideur est la suivante :

	R	S	$\{R,S\}$
w_2	0	120	50

– d_3 : on commercialise l'engrais à un prix élevé. Si l'engrais s'avère produire une croissance (I)nsuffisante, (T)rès moyenne ou (M)oyenne, ce sera un échec commercial (conséquence R), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_3 du décideur est la suivante :

	R	S	$\{R,S\}$
w_3	0	150	30

On commence par traduire les événements R, S, $\{R,S\}$ en termes d'événements de $\mathcal{X}$:

	R	S	$\{R,S\}$
	I	$\{T,M,E\}$	$\mathcal{X}$
w_1	0	100	70
f	$\frac{50}{300}$	$\frac{210}{300}$	1
ϕ	$\frac{50}{300}$	$\frac{210}{300}$	$\frac{40}{300}$

	R	S	$\{R,S\}$
	$\{I,T\}$	$\{M,E\}$	$\mathcal{X}$
w_2	0	120	50
f	$\frac{100}{300}$	$\frac{150}{300}$	1
ϕ	$\frac{100}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{50}{300}$

	R	S	$\{R,S\}$
	$\{I,T,M\}$	E	$\mathcal{X}$
w_3	0	150	30
f	$\frac{180}{300}$	$\frac{60}{300}$	1
ϕ	$\frac{180}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{60}{300}$

Maintenant, on peut appliquer BEU :

$$BEU(d_1) = \frac{50}{300} \times 0 + \frac{210}{300} \times 100 + \frac{40}{300} \times 70 = \frac{238}{3}.$$
$$BEU(d_2) = \frac{100}{300} \times 0 + \frac{150}{300} \times 120 + \frac{50}{300} \times 50 = \frac{205}{3}.$$
$$BEU(d_2) = \frac{180}{300} \times 0 + \frac{60}{300} \times 150 + \frac{60}{300} \times 30 = \frac{108}{3}.$$

La décision optimale est donc d_1.