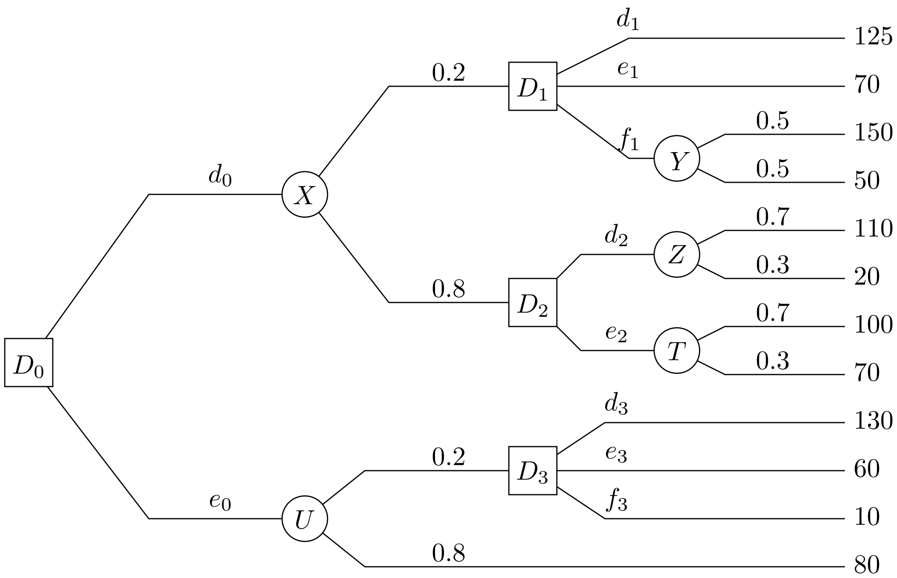
Examen de 2ème session du module MODE

C. Gonzales / P. Perny

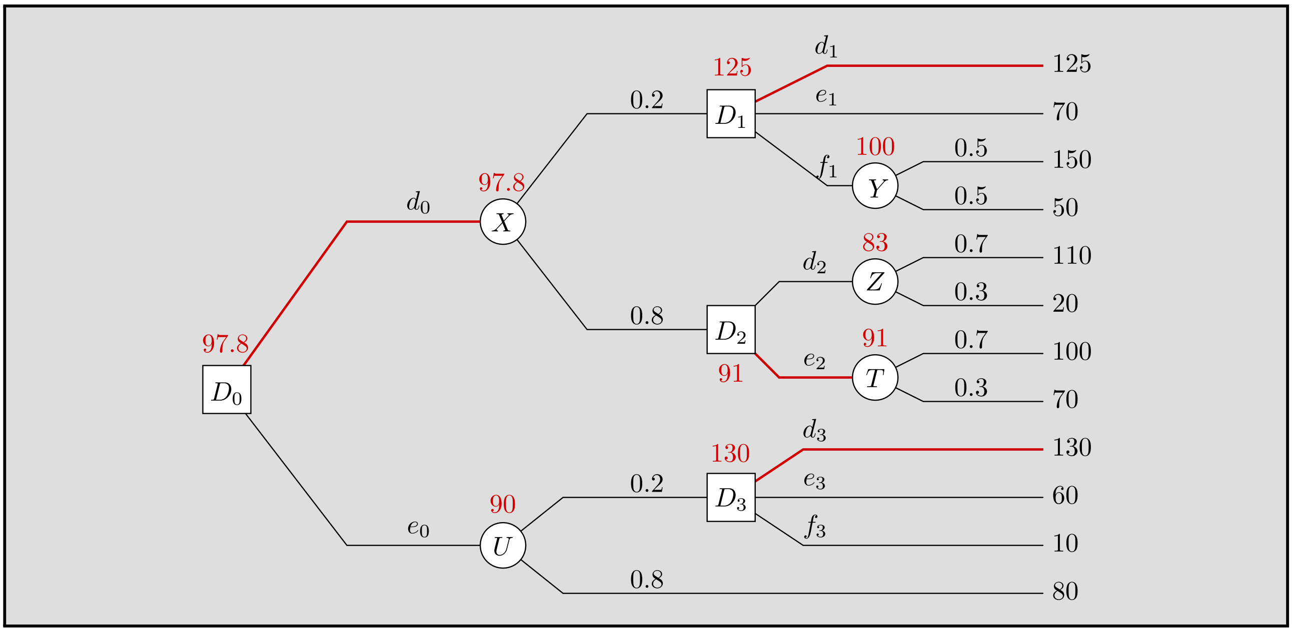
Durée : 2 heures 30

Exercice 1 (6 points – Décision avec un critère RDU)

On considère l'arbre de décision ci-dessous. Sur les feuilles sont indiquées les utilités du décideur.



Q 1.1 Supposons que le décideur soit maximisateur d'espérance d'utilité. Déterminer la stratégie optimale du décideur.



Q 1.2 Supposons que le décideur utilise un critère RDU avec pour fonction de déformation des probabilités φ la fonction affine par morceaux dont les segments sont définis par :

p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$
0	0	0,1	0,3	0,2	0,4	0,3	0,55	0,4	0,65
0,46	0,68	0,5	0,7	0,56	0,75	0,6	0,77	0,66	0,8
0,7	0,84	0,76	0,87	0,8	0,9	0,9	0,95	1	1

Q 1.2.1 Déterminer la valeur de RDU aux nœuds D_1, D_2 et D_3.

$\mathrm{RDU}(d_1) = 125$
$\mathrm{RDU}(e_1) = 70$
$\mathrm{RDU}(f_1) = 50 + \varphi(0.5)[150 - 50] = 120$
$\mathrm{RDU}(d_2) = 20 + \varphi(0.7)[110 - 20] = 95.6$
$\mathrm{RDU}(e_2) = 70 + \varphi(0.7)[100 - 70] = 95.2$
$\mathrm{RDU}(d_3) = 130$
$\mathrm{RDU}(e_3) = 60$
$\mathrm{RDU}(f_3) = 10$

Q 1.2.2 Déterminer la valeur de RDU pour l'ensemble des stratégies à la racine D_0.

$\mathrm{RDU}(d_0, d_1, d_2) = 20 + \varphi(0.76)[110 - 20] + \varphi(0.2)[125 - 110] = 104.3$
$\mathrm{RDU}(d_0, d_1, e_2) = 70 + \varphi(0.76)[100 - 70] + \varphi(0.2)[125 - 100] = 106.1$
$\mathrm{RDU}(d_0, e_1, d_2) = 20 + \varphi(0.76)[70 - 20] + \varphi(0.56)[110 - 70] = 93.5$
$\mathrm{RDU}(d_0, e_1, e_2) = 70 + \varphi(0.56)[100 - 70] = 92.5$
$\mathrm{RDU}(d_0, f_1, d_2) = 20 + \varphi(0.76)[50 - 20] + \varphi(0.66)[110 - 50] + \varphi(0.1)[150 - 110] = 106.1$
$\mathrm{RDU}(d_0, f_1, e_2) = 50 + \varphi(0.9)[70 - 50] + \varphi(0.66)[100 - 70] + \varphi(0.1)[150 - 100] = 108$
$\mathrm{RDU}(e_0, d_3) = 80 + \varphi(0.2)[130 - 80] = 100$
$\mathrm{RDU}(e_0, e_3) = 60 + \varphi(0.8)[80 - 60] = 78$
$\mathrm{RDU}(e_0, f_3) = 10 + \varphi(0.8)[80 - 10] = 73$

Q 1.2.3 Déterminer la stratégie optimale selon RDU.

$\Longrightarrow$ stratégie gagnante : (d_0, f_1, e_2)

Exercice 2 (5 points – Décision dans l'incertain possibiliste)

Soit X un ensemble discret fini et $u : X \to [0,\ 1]$ une fonction d'utilité représentant la préférence du décideur sur les conséquences certaines $x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$. On s'intéresse au critère de *l'utilité qualitative de Sugeno* défini, pour une capacité μ, par $S_\mu(f) = \max_{x \in X} \min(u(x), \mu(F_x))$ où $F_x = \{s \in S, u(f(s)) \geq u(x)\}$.

Q 2.1 Montrer que la relation de préférence $\succsim$ définie par $f \succsim g \iff S_\mu(f) \geq S_\mu(g)$ ne vérifie pas nécessairement le *Sure Thing Principle* de Savage.

Q 2.2 Soit π une distribution de possibilité définie sur S. Quelle forme particulière prend le critère de Sugeno lorsque $\mu(A) = \sup_{s \in A}\{\pi(s)\}$ pour tout $A \subseteq S$ (on pourra se dispenser de faire la démonstration). Démontrer alors que le critère obtenu vérifie une version affaiblie du *Sure Thing Principle*.

Q 2.3 Reprendre la question précédente lorsque $\mu(A) = 1 - \sup_{s \in \bar{A}}\{\pi(s)\}$ pour tout $A \subseteq S$.

Exercice 3 (4 points – Fonctions de croyance du vigneron)

Au salon des vignerons indépendants, monsieur X, vigneron de profession, a un petit stand à tenir. Il est débordé et ne note pas toujours avec précision les vins qu'il a vendus. Il vend des bourgognes blancs (B) et rouges (R). Certains de ses vins sont des 1er crus (C), d'autres sont plus ordinaires (O). À la fin du salon, il reprend ses notes et essaye d'estimer la répartition de ses ventes suivant les jours où le salon s'est tenu. Le premier jour, il a noté avec précision que, sur les 1000 bouteilles vendues, 200 étaient des rouges 1er cru, 300 étaient des rouges ordinaires, 200 étaient des blancs 1er cru et 100 étaient des blancs ordinaires. Par ailleurs, selon ses notes, il a aussi vendu 100 blancs dont il n'a pas noté s'ils étaient des 1er crus ou bien des ordinaires. Enfin, il a aussi vendu 100 bouteilles ordinaires dont il ne se rappelle plus la couleur.

Q 3.1 En supposant que les fréquences de vente ainsi observées sont assimilables à des probabilités, donnez une expression de l'ensemble des lois de probabilités $\mathcal{P}$ compatibles avec les informations ci-dessus.

Ensemble des événements élémentaires : $\mathcal{X} = \{BC, BO, RC, RO\}$.
$\mathcal{P} = \{P(BC) = \alpha, P(BO) = \beta, P(RC) = \gamma, P(RO) = \delta :$
$\alpha = 0,2 + t,$
$\beta = 0,1 + y + z,$
$\gamma = 0,2,$
$\delta = 0,3 + x,$
$x + y = 0,1$
$z + t = 0,1\}.$

Q 3.2 Calculez l'enveloppe inférieure f de $\mathcal{P}$ et montrez que $\mathcal{P} = \{$ lois de probas $P : P \geq f\}$.

	$\emptyset$	BC	BO	RC	RO	B	C	$BC \cup RO$	$BO \cup RC$	O	R	$B \cup RC$	$B \cup RO$	$C \cup RO$	$O \cup RC$	$\mathcal{X}$
ϕ	0	0.2	0.1	0.2	0.3	0.1	0	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0
f	0	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.5	0.5	0.6	0.8	0.7	0.7	1

Q 3.3 Calculez l'inverse de Möbius ϕ de f. Montrez que f est une fonction de croyance.

$$\left.\begin{array}{r} \phi(\emptyset) = 0 \\ \displaystyle\sum_{B \subseteq \mathcal{X}} \phi(B) = 1 \\ \forall B \subseteq \mathcal{X},\ \phi(B) \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ est une fonction de croyance.}$$

Exercice 4 (5 points – Processus décisionnels Markoviens)

Chaque fin de trimestre le responsable du marketing d'un magasin regroupe ses clients en deux classes, en fonction de leurs achats au cours du trimestre passé. Soit P les clients réalisant des achats peu importants, et G les clients réalisant de gros achats. Le responsable cherche à savoir à qui envoyer un catalogue pour le trimestre à venir.
Le coût d'envoi d'un catalogue est 6 € par client. Un client de la classe P qui reçoit un catalogue achète en moyenne pour 10 € pour le trimestre. S'il ne reçoit pas le catalogue ses achats seront en moyenne de 5 €. Un client de la classe G qui reçoit un catalogue achètera en moyenne au magasin pour 25 €. Sans catalogue, ses achats seront en moyenne de 12 €. La décision d'envoyer ou non un catalogue à un client a aussi des conséquences sur sa future classification. Un client P restera P avec une probabilité de 0.3 s'il reçoit un catalogue, et de 0.5 sinon. Un client G restera G avec une probabilité de 0.8 s'il reçoit un catalogue, et de 0.4 sinon.

Q 4.1 Modéliser le problème sous forme d'un PDM à horizon infini et écrire les équations de Bellman pour un taux d'actualisation $\gamma = 0.9$.

Q 4.2 Évaluer la politique qui consiste à envoyer le catalogue à tout le monde, et celle qui consiste à envoyer le catalogue à personne. Laquelle préférez-vous ?

Q 4.3 Déterminer la politique optimale.