Examen du module MODE

C. Gonzales / P. Perny

Durée : 3 heures

Seuls documents autorisés :
Les supports de cours et les calculatrices

Exercice A (5 points – Jeu télévisé)

On se place dans la situation d'un participant à un jeu télévisé qui va se voir poser jusqu'à quatre questions successives. A chaque question, si le joueur répond correctement, il engrange une certaine somme d'argent qui s'ajoute aux gains obtenus aux questions précédentes puis on passe à la question suivante (et ainsi de suite jusqu'à la quatrième question après laquelle le jeu prend fin). A chaque question posée le joueur a le choix de répondre ou d'abandonner. S'il abandonne, le jeu s'arrête et le joueur empoche la totalité des gains engendrés par ses bonnes réponses. S'il choisit de répondre alors une mauvaise réponse annule tous les gains du joueur et entraîne la fin du jeu. Les possibilités de bonne réponse π_i et les gains associés γ_i (en Euros) à chaque question i sont donnés dans le tableau suivant :

question i	π_i	γ_i
1	0.6	10000
2	0.5	20000
3	0.4	30000
4	0.3	40000

ce qui peut permettre de gagner jusqu'à 100000 Euros s'il l'on enchaîne 4 bonnes réponses. Dans tout l'exercice, on supposera que la fonction d'utilité du joueur est $u(x) = x/100000$.

Q A.1 Modéliser ce problème comme par un arbre de décision/hasard.

Q A.2 Déterminer la politique optimale pour le joueur selon le critère de l'utilité qualitative optimiste puis selon le critère de l'utilité qualitative pessimiste. Commentez les résultats obtenus.

Q A.3 Soit π une distribution de possibilité et Π la mesure de possibilité associée à cette distribution de possibilité. Soit v_φ la fonction d'ensemble définie par : $v_\varphi(A) = \varphi(\Pi(A))$ pour toute fonction φ strictement croissante sur $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Montrer que v_φ est une capacité et que c'est une mesure de possibilité. Pour $\varphi(x) = \sqrt{x}$ calculer pour le jeu précédent la politique optimale au sens de l'intégrale de Sugeno S_{v_φ}. On prendra soin de justifier la méthode employée.

Q A.4 Dans la table ci-dessus, on interprète maintenant les coefficients π_i comme des probabilités. Déterminer la politique optimale au sens du critère EU puis au sens du critère

RDU_φ en choisissant pour fonction de déformation des probabilités la fonction $\varphi(x) = x^2$. Ici encore, on prendra soin de justifier la méthode employée.

Exercice B (5 points – Des choux et des carottes)

Une entreprise agricole possède 2000 hectares de champs et souhaite y planter des choux et/ou des carottes. D'après un de ses agronomes, suivant les conditions climatiques futures (précipitations, chaleur, etc), ces deux cultures vont être plus ou moins productives. L'agronome a partitionné l'ensemble des conditions climatiques en les 5 conditions $\omega_1, \ldots, \omega_5$ suivantes :

- Si ω_1 se produit, les choux pousseront bien mais pas les carottes ;
- Si ω_2 se produit, les carottes pousseront bien, mais on ne sait pas ce que cela aura comme impact sur les choux ;
- Si ω_3 se produit, ni les carottes ni les choux ne pousseront ;
- Si ω_4 se produit, les carottes et les choux pousseront bien tous les deux ;
- Si ω_5 se produit, on ne sait pas ce qui arrivera.

Après étude, l'agronome a pu déterminer les probabilités d'apparition des ω_i :

$$P(\omega_1) = 0,1 \qquad P(\omega_2) = 0,2 \qquad P(\omega_3) = 0,3 \qquad P(\omega_4) = 0,1 \qquad P(\omega_5) = 0,3.$$

Q B.1 Soit H l'événement correspondant au fait que les choux poussent bien et A celui correspondant au fait les carottes poussent bien. Soit $\mathcal{A} = \{(H, A), (\overline{H}, A), (H, \overline{A}), (\overline{H}, \overline{A})\}$.

Donnez une expression de l'ensemble des lois de probabilités $\mathcal{P}$ définies sur $(\mathcal{A}, 2^{\mathcal{A}})$ et compatibles avec les informations ci-dessus.

D'après l'énoncé, toute distribution $q \in \mathcal{P}$ est définie par les probas de ses événements élémentaires :

$$\alpha = q(\overline{HA}) \qquad \beta = q(\overline{H}A) \qquad \gamma = q(H\overline{A}) \qquad \delta = q(HA)$$

et vérifie :
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$;
- $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$;
- $\gamma \geq P(\omega_1) = 0.1$;
- $\beta + \delta \geq P(\omega_2) = 0.2$;
- $\alpha \geq P(\omega_3) = 0.3$;
- $\delta \geq P(\omega_4) = 0.1$.

Q B.2 Montrez que $\mathcal{P}$ est non vide.

Il suffit d'exhiber une loi dans $\mathcal{P}$. Par exemple : $\{\alpha = 0,3; \quad \beta = 0,4; \quad \gamma = 0,1; \quad \delta = 0.1\} \in \mathcal{P}$.

Q B.3 Calculez l'enveloppe inférieure f de $\mathcal{P}$ ainsi que son inverse de Möbius.

	$\emptyset$	$\overline{HA}$	$\overline{H}A$	$H\overline{A}$	HA	$\overline{H}$	$\overline{A}$	A	H	$\overline{HA} \cup HA$	$\overline{H}A \cup H\overline{A}$	$\overline{HA}^C$	$\overline{H}A^C$	$H\overline{A}^C$	HC^C	$\mathcal{A}$
f	0	$0,3$	0	$0,1$	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,3$	$0,2$	$0,4$	$0,1$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,4$	1
ϕ	0	$0,3$	0	$0,1$	$0,1$	0	0	$0,2$	0	0	0	0	0	0	0	0.3

Q B.4 La fonction f est-elle une fonction de croyance ? Vous justifierez votre réponse.

f est une fonction de croyance car tous les ϕ sont positifs ou nuls et $\sum_A \phi(A) = 1$.

Q B.5 L'entreprise a décidé de planter dans ses champs pour moitié des choux et pour moitié des carottes. En fonction des conditions climatiques, cela peut avoir les 3 conséquences suivantes :

- C_1 : aucune des 2 cultures n'a poussé ;
- C_2 : une des deux cultures a poussé mais pas l'autre ;
- C_3 : les deux cultures ont bien poussé.

Les choux et les carottes rapportent le même bénéfice à l'entreprise. Aussi, sa fonction d'utilité ne dépend-elle que de la quantité de légumes produits. L'utilité de l'entreprise est définie par :

	C_1	C_2	C_3	$C_1 \cup C_2$	$C_1 \cup C_3$	$C_2 \cup C_3$	$C_1 \cup C_2 \cup C_3$
u	0	10	40	5	7	20	12

Selon le critère BEU, quelle est la valeur de l'utilité de l'entreprise. Vous justifierez votre réponse.

	C_1	C_2	C_3	$C_1 \cup C_2$	$C_1 \cup C_3$	$C_2 \cup C_3$	$C_1 \cup C_2 \cup C_3$
u	0	10	40	5	7	20	12
f	$0,3$	$0,1$	$0,1$	$0,4$	$0,4$	$0,4$	1
ϕ	$0,3$	$0,1$	$0,1$	0	0	$0,2$	$0,3$

Donc BEU $= 0,3 \times 0 + 0,1 \times 10 + 0,1 \times 40 + 0,2 \times 20 + 0,3 \times 12 = 12,6$.

Exercice C (5 points – Finance)

La société CREDITCAR doit déterminer chaque mois si elle finance ses clients désireux d'acheter une voiture avec des prêts à 8% ou à 11% d'intérêts. Si pendant le mois courant elle choisit de proposer des financements à 8% les distributions de probabilités des ventes dans le mois courant sont données dans la Table 1 en fonction de l'état des ventes durant le mois passé. Si la société choisit de proposer des financements à 11% les distributions de probabilités des ventes sont données dans la Table 2. Pour simplifier on distingue les

	Ventes du mois courant	
Ventes du dernier mois	bonnes	mauvaises
bonnes	0.90	0.10
mauvaises	0.40	0.60

TABLE 1 – Prêts à 8%

mois où les ventes sont bonnes (ce qui représente 400 achats de véhicules par mois) et les mois où les ventes sont mauvaises (ce qui représente 300 achats de véhicules par mois). Par exemple, si le mois dernier les ventes étaient mauvaises et que CREDITCAR décide d'accorder des prêts à 8% pour le mois courant, il y a 40% de chances que les ventes soient bonnes dans le mois courant et 60% de chances qu'elles soient mauvaises. Par ailleurs, on sait que pour un financement au taux de 11% la société CREDITCAR gagne 1000 Euros par voiture alors qu'elle gagne 800 Euros par voiture avec un financement à un taux de 8%. L'objectif de la société est de maximiser l'espérance de son revenu actualisé à l'horizon infini en utilisant un facteur d'actualisation $\gamma = 0.9$.

Q C.1 Formuler le problème comme un Processus Décisionnel Markovien. On prendra soin de préciser les états, les actions et les récompenses et on écrira les équations de Bellman pour ce problème.

Q C.2 Déterminer la politique optimale pour ce problème en utilisant l'itération de la politique à partir de la politique qui consiste à accorder exclusivement des prêts à 8%.

	Ventes du mois courant	
Ventes du dernier mois	bonnes	mauvaises
bonnes	0.80	0.20
mauvaises	0.20	0.80

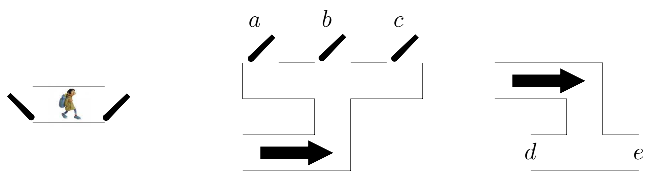
TABLE 2 – Prêts à 11%

Q C.3 Formuler un programme linéaire permettant de déterminer la politique optimale et le résoudre pour retrouver le résultat de la question précédente.

Q C.4 La politique optimale serait-elle modifiée si la société parvenait à gagner 900 Euros par voiture financée avec des prêts à 8% ? Justifier la réponse donnée.

Exercice D (5 points – Labyrinthe)

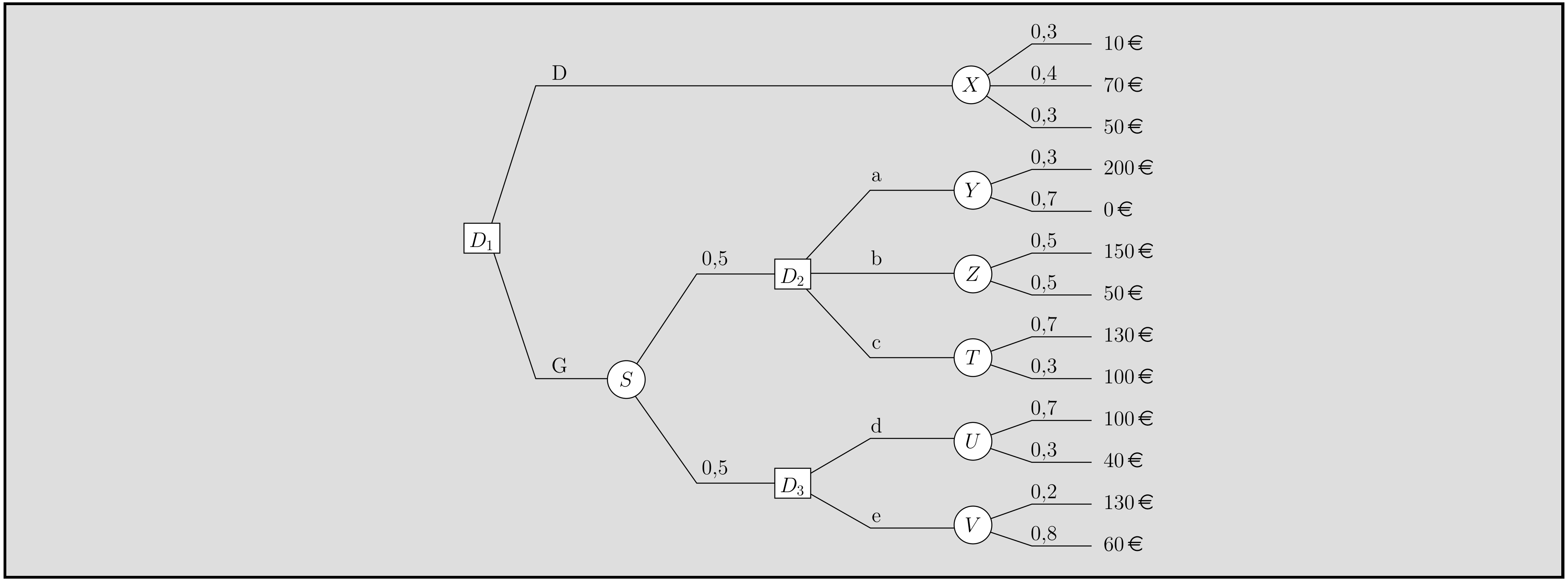
Un joueur est « largué » dans un labyrinthe dont il possède la carte. Dans ce dernier, des trésors de différentes valeurs ont été déposés et le jeu consiste à se déplacer de manière à trouver l'un des trésors. Dès que le joueur en a trouvé un, le jeu s'arrête. Au début, il ne sait pas exactement où il est, mais il peut observer que la pièce dans laquelle il est a la configuration de la figure 1.a, c'est-à-dire qu'il a une porte à gauche et une porte à droite. Dans ce cas, d'après son plan, il sait que s'il utilise la porte de gauche, il aura statistiquement 30% de chances de trouver un trésor de valeur 10 €, 40% de chances de trouver 70 € et 30% de trouver 50 €. De même, derrière la porte de droite, il a une chance sur deux qu'il y ait un couloir remontant vers le haut (figure 1.b) et une chance sur deux d'avoir un couloir vers le bas (figure 1.c). Dans le premier cas, on arrive obligatoirement à trois portes a, b, c, comme indiqué sur la figure 1.b. Derrière la porte de type a, le joueur a 30% de chances d'obtenir 200 € et 70% de chances d'obtenir 0 €, derrière la porte de type b, il a 50% de chances d'obtenir 150 € et 50% de chances d'obtenir 50 €, et derrière la porte de type c, il a 70% de chances d'obtenir 130 € et 30% de chances d'obtenir 100 €. Le couloir descendant, quant à lui, a deux couloirs adjacents (de types d et e comme indiqué sur la figure 1.c). Si le joueur suit le couloir d, il aura 70% de chances d'obtenir 100 € et 30% de chances d'avoir 40 €, alors que s'il suit le couloir e, il aura 20% de chances d'obtenir 130 € et 80% de chances d'obtenir 60 €. Dans la pièce de la figure 1.a, il n'est autorisé à ouvrir qu'une seule porte.



a) le point de départ b) le couloir haut c) le couloir bas

FIGURE 1 – Le labyrinthe dans lequel se trouve le joueur.

Q D.1 Tracez l'arbre de décision correspondant à ce problème.



Q D.2 Déterminez la stratégie optimale du décideur à la racine de l'arbre si celui-ci a pour critère RDU, avec, pour fonction d'utilité sur l'espace des conséquences la fonction $f(x) = x$, et pour déformation de probabilité la fonction φ définie par :

x	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.4	0.45	0.50	0.60	0.65	0.70	0.75	0.8	0.85	1
$\varphi(x)$	0.2	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.62	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.87	0.88	0.90	1

$$
\begin{aligned}
RDU(G) &= 10 + [50-10] \times \phi(0.7) + [70-50] \times \phi(0.4) = 56.4 \\
RDU(Dad) &= 0 + [40-0] \times \phi(0.65) + [100-40] \times \phi(0.5) + [200-100] \times \phi(0.15) = 114 \\
RDU(Dae) &= 0 + [60-0] \times \phi(0.65) + [130-60] \times \phi(0.25) + [200-130] \times \phi(0.15) = 111 \\
RDU(Dbd) &= 40 + [50-40] \times \phi(0.85) + [100-50] \times \phi(0.6) + [150-100] \times \phi(0.25) = 111. \\
RDU(Dbe) &= 50 + [60-50] \times \phi(0.75) + [130-60] \times \phi(0.35) + [150-130] \times \phi(0.25) = 110 \\
RDU(Dcd) &= 40 + [100-40] \times \phi(0.85) + [130-100] \times \phi(0.35) = 112 \\
RDU(Dce) &= 60 + [100-60] \times \phi(0.6) + [130-100] \times \phi(0.45) = 109.5
\end{aligned}
$$

La stratégie optimale est donc de choisir d'abord la porte de droite et, ensuite, de choisir la porte a ou bien la porte d.