Examen du module MODE

C. Gonzales / P. Weng

Durée : 3 heures

Seuls documents autorisés :
Une feuille de papier format A4 recto/verso.

Exercice A (5 points – Achat de câbles informatiques)

Un ingénieur système souhaite acheter un lot de 1000 câbles informatiques pour le compte de son entreprise. Il a inspecté grossièrement le lot en question et a déterminé que les câbles qu'il contient pouvaient être de trois qualités différentes : très bonne (T), bonne (B), moyenne (M). Dans le lot, l'ingénieur système a compté 200 câbles de type T, 250 de type B, 150 de type M, 150 de type T ou B (son inspection étant grossière, il n'a pu déterminer avec certitude le type précis de ces 150 câbles) et 150 câbles de type B ou M. Enfin, par manque de temps, il n'a pu examiner les 100 derniers câbles.

Q A.1 Donnez une expression de l'ensemble des lois de probabilités $\mathcal{P}$ compatibles avec les informations ci-dessus.

Tout d'abord l'univers sur lequel porte ces lois de probabilité est $\mathcal{X} = \{T, B, M\}$. Posons $P(T) = \alpha$, $P(B) = \beta$ et $P(M) = \gamma$. Alors L'ensemble $\mathcal{P}$ est défini par $\mathcal{P} = \{P : \alpha \geq 0,2; \quad \beta \geq 0,25; \quad \gamma \geq 0,15; \quad \alpha + \beta \geq 0,2 + 0,25 + 0,15 = 0,6; \quad \beta + \gamma \geq 0,25 + 0,15 + 0,15 = 0,55; \quad \alpha + \beta + \gamma = 1; \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0\}$.

Q A.2 Montrez que $\mathcal{P}$ est non vide.

Il suffit d'exhiber une loi dans $\mathcal{P}$. Par exemple : $\{\alpha = 0,4; \quad \beta = 0,3; \quad \gamma = 0,3\} \in \mathcal{P}$.

Q A.3 Calculez l'enveloppe inférieure f de $\mathcal{P}$ ainsi que son inverse de Möbius.

	$\emptyset$	T	B	M	$T \cup B$	$T \cup M$	$B \cup M$	$\mathcal{X}$
f	0	$0,2$	$0,25$	$0,15$	$0,6$	$0,35$	$0,55$	1
ϕ	0	$0,2$	$0,25$	$0,15$	$0,15$	0	$0,15$	$0,1$

Q A.4 La fonction f est-elle une fonction de croyance ? Vous justifierez votre réponse.

f est une fonction de croyance car tous les ϕ sont positifs ou nuls et $\sum_A \phi(A) = 1$.

Q A.5 À l'usage, les câbles de type T sont défectueux (D) et les autres sont en bon état de fonctionnement (F). L'ingénieur système estime que sa fonction d'utilité concernant l'achat de tout le lot est égale à :

	F	D	$F \cup D$
u	100	-200	-100

Selon le critère BEU, quelle est la valeur de la fonction d'utilité de l'ingénieur système si celui-ci décide d'acheter le lot ? Sachant que, s'il décide de ne pas acheter le lot, son utilité est de 0, doit-il acheter le lot ?

	F	D	$F \cup D$
	$T \cup B$	M	$\mathcal{X}$
u	100	-200	-100
f	$0,6$	$0,15$	1
ϕ	$0,6$	$0,15$	$0,25$

Donc $BEU(\text{achat}) = 0,6 \times 100 - 0,15 \times 200 - 0,25 \times 100 = 5$. L'ingénieur a donc intérêt à acheter le lot.

Exercice B (5 points – Espérance du pêcheur)

Le Décideur (un patron-pêcheur) a la possibilité d'assurer son bateau, valant 100 k€ (milliers d'euros) et constituant sa fortune initiale, contre :
– une panne (événement A_1), de probabilité $p_1 = 1/10$, de coût 10 k€ ;
– un naufrage (événement A_2), de probabilité $p_2 = 1/100$, de coût 100 k€.
A_1, A_2 et $A_3 = (A_1 \cup A_2)^c$ forment une partition. Le décideur a pour critère EU, avec pour utilité de vNM $u(.)$ la fonction :

$$x \longmapsto u(x) = \begin{cases} 100(x-75) & \text{pour } x \geq 75 \\ 200(x-75) & \text{pour } x < 75 \end{cases}$$

où x est son état de fortune (exprimé en k€). Il a le choix entre :
– ne pas s'assurer (décision δ) ;
– s'assurer complètement avec une franchise de 5 k€ (décision d_1) [l'assurance rembourse le coût du sinistre moins la franchise] ;
– s'assurer à 70% (décision d_2) [l'assurance ne rembourse que 70% du coût du sinistre].
S'il s'assure, il doit payer une prime d'assurance c_1 pour d_1 et c_2 pour d_2.

Q B.1 L'assureur fixe les montants des primes de façon que son espérance mathématique de gain soit nulle (*valeur actuarielle*). Calculer c_1 et c_2.

Valeur actuarielle de l'assurance complète avec franchise d_1 :

$$c_1 = (1/10)[10 - 5] + (1/100)[100 - 5] = 1,45.$$

Valeur actuarielle de l'assurance partielle d_2 :

$$c_2 = (1/10) \times 7 + (1/100) \times 70 = 1,40.$$

Q B.2 Quelle est l'attitude vis-à-vis du risque du Décideur ? Que préfère-t-il entre les décisions δ, d_1 et d_2 ?

$u(.)$ est linéaire par morceaux, de pente 200 (pour $x < 75$) puis 100 (pour $x \geq 75$) ; elle est donc concave donc le Décideur est adversaire du risque.

Comparaison des décisions δ, d_1 et d_2 :

$$\begin{aligned}
EU(\delta) &= (1/10)u(100-10) + (1/100)u(100-100) + (89/100)u(100) \\
&= (1/10) \times 100 \times 15 + (1/100) \times 200 \times (-75) + (89/100) \times 100 \times 25 \\
&= 2225 \\
EU(d_1) &= (11/100)u(100-5-c_1) + (89/100).u(100-c_1) \\
&= (11/100) \times 100 \times 18,55 + (89/100) \times 100 \times 23,55 \\
&= 2300 \\
EU(d_2) &= (1/10)u(100-3-c_2) + (1/100)u(100-30-c_2) + (89/100)u(100-c_2) \\
&= (1/10) \times 100 \times 20,60 + (1/100) \times 200 \times (-6,40) + (89/100) \times 100 \times 23,60 \\
&= 2296,6.
\end{aligned}$$

La meilleure décision est d_1.

Q B.3 On se place désormais dans l'hypothèse suivante : le Décideur pense que si l'assureur a à lui rembourser une somme supérieure à 5 k€, il y a une probabilité 1/2 qu'il lui rembourse bien toute cette somme et une probabilité 1/2 qu'il ne soit pas solvable et ne lui rembourse que 5 k€.

Q B.3.1 Quelle est maintenant la meilleure décision ?

Comparaison des décisions δ, d_1 et d_2 :

$$\begin{aligned}
EU(\delta) &= 2225 \text{ n'a pas changé} \\
EU(d_1) &= (1/10 + (1/100) \times (1/2))u(100 - 5 - c_1) + \\
&\qquad (1/100) \times (1/2)u(5 - c_1) + (89/100)u(100 - c_1) \\
&= (21/200) \times 100 \times 18,55 + (1/200) \times 200 \times (-71,55) + (89/100) \times 100 \times 23,55 \\
&= 2219,175 \\
EU(d_2) &= (1/10) \times (1/2)u(100 - 3 - c_2) + (1/10) \times (1/2)u(100 - 5 - c_2) + \\
&\qquad (1/100) \times (1/2)u(100 - 30 - c_2) + (1/100) \times (1/2)u(100 - 95 - c_2) + \\
&\qquad (89/100)u(100 - c_2) \\
&= (1/10) \times (1/2) \times 100 \times 20,60 + (1/10) \times (1/2) \times 100 \times 18,60 + \\
&\qquad (1/100) \times (1/2) \times 200 \times (-6,40) + (1/100) \times (1/2) \times 200 \times (-71,40) + \\
&\qquad (89/100) \times 100 \times 23,60 \\
&= 2218,6.
\end{aligned}$$

La meilleure décision est maintenant δ.

Q B.3.2 Est-il prêt à payer, avant de prendre sa décision, 1 k€ à un expert capable de lui dire, immédiatement et avec certitude, si l'assureur est solvable ? (On construira l'arbre de décision correspondant à ce problème).

Dans le cas d'$Ex(pertise)$:
si l'avis est $S(olvabilité)$, les EU deviennent :

$$
\begin{aligned}
EU(\delta) &= (1/10).u(100-10-1)+(1/100).u(100-100-1)+(89/100).u(100-1)\\
&= (1/10)\times 100\times 14+(1/100)\times 200\times(-76)+(89/100)\times 100\times 24\\
&= 2123\\
EU(d_1) &= (11/100).u(100-5-c_1-1)+(89/100).u(100-c_1-1)\\
&= (11/100)\times 100\times 17,55+(89/100)\times 100\times 22,55\\
&= 2200\\
EU(d_2) &= (1/10).u(100-3-c_2-1)+(1/100).u(100-30-c_2-1)+(89/100).u(100-c_2\\
&= (1/10)\times 100\times 19,60+(1/100)\times 200\times(-7,40)+(89/100)\times 100\times 22,60\\
&= 2191,6.
\end{aligned}
$$

La meilleure décision est d_1.
Si l'avis est $NonS(olvabilité)$, les EU deviennent :

$$
\begin{aligned}
EU(\delta) &= 2.123,\ \text{comme ci-dessus.}\\
EU(d_1) &= (1/10).u(100-5-c_1-1)+(1/100).u(5-c_1-1)+(89/100).u(100-c_1-1)\\
&= (1/10)\times 100\times 17,55+(1/100)\times 200\times(-72,55)+(89/100)\times 100\times 22,55\\
&= 2037,35
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EU(d_2) &= (1/10).u(100-5-c_2-1)+(1/100).u(100-95-c_2-1)+(89/100)u(100-c_2 \\
&= (1/10)\times 100\times 17,60+(1/100)\times 200\times(-72,40)+(89/100)\times 100\times 22,60 \\
&= 2042,6.
\end{aligned}
$$

La meilleure décision est δ.
La meilleure stratégie commençant par une $Ex(pertise)$, a une probabilité 1/2 (avis : $S(olvabilit\acute{e})$) de continuer par d_1, pour une EU conditionnelle $EU(d_1) = 2200$ et une probabilité 1/2 (avis : $NonS(olvabilit\acute{e})$) de continuer par δ, pour une EU conditionnelle $EU(\delta) = 2123$, soit $EU = (1/2)\times 2200 + (1/2)\times 2123 = 2161,3$.
C'est inférieur à l'EU optimale avec $NonEx(pertise)$ obtenue pour la décision δ qui est $EU(\delta) = 2225$. L'expert est trop cher.