Examen du module MODE

C. Gonzales / P. Perny

Durée : 3 heures

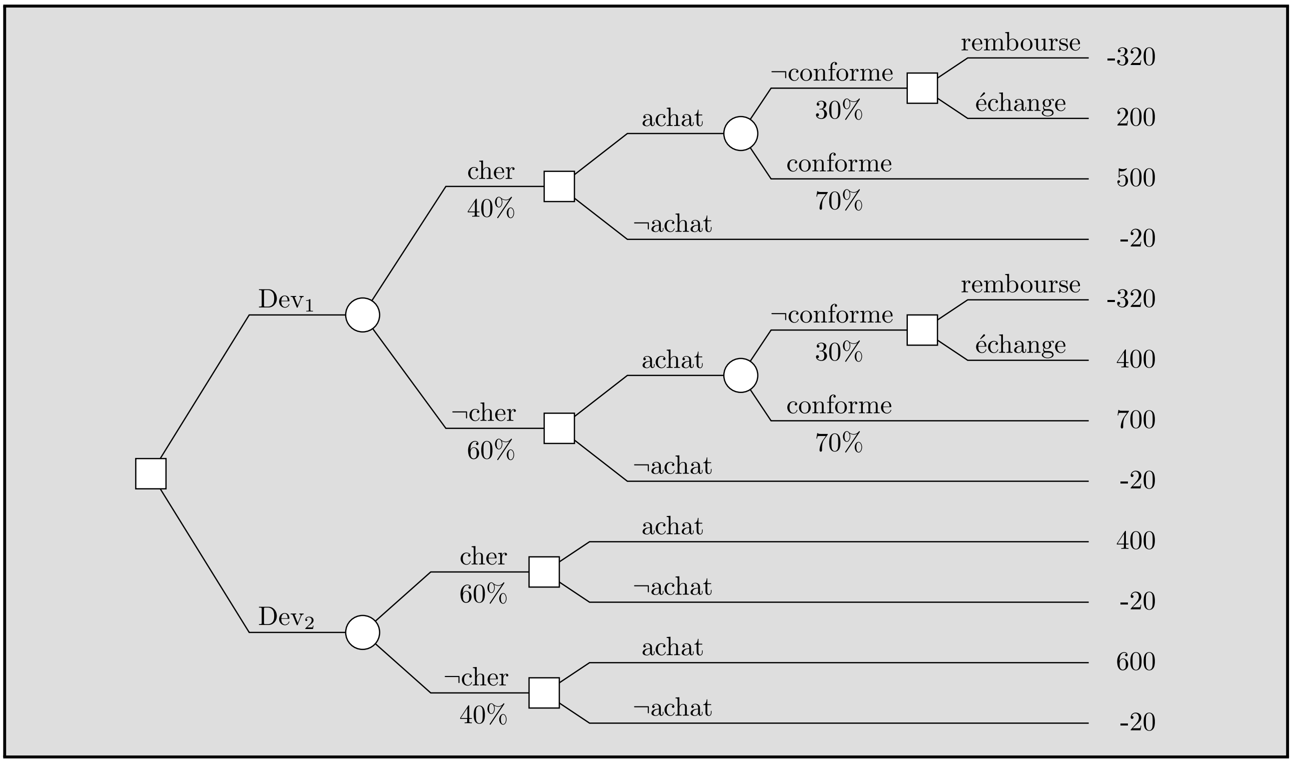
Seuls documents autorisés :
Les transparents de cours, les notes de cours ainsi que les articles étudiés dans la 2ème partie du cours sont les seuls documents autorisés. Les calculatrices seront également autorisées.

Exercice A (4 points – Achat de livres)

Au sein de votre entreprise, vous êtes chargé d'acheter un lot d'ouvrages scientifiques dont le prix « normal », c'est-à-dire hors réductions, est de 10000 €. La démarche à suivre consiste à faire réaliser auprès de libraires des devis puis, en fonction de ceux-ci, de ne finalement pas acheter le lot ou bien de l'acheter chez un des libraires. Pour cela, vous pouvez contacter deux libraires L_1 et L_2 et faire réaliser gratuitement des devis (Dev_1 et Dev_2). Le libraire L_1 est, en principe, moins cher que L_2 : pour un tel achat, avec L_1, vous avez 60% de chances d'obtenir une réduction de 500 € et 40% de chances d'obtenir une réduction de 300 € ; avec L_2, vous avez 40% de chances d'obtenir une réduction de 400 € et 60% de chances d'obtenir une réduction de 200 €. Toutefois, le libraire L_1 est moins fiable que L_2 : lorsque l'on passe une commande à L_2, on sait que les livres reçus sont ceux que l'on a commandés alors que quand on passe une commande à L_1, on a 70% de chances d'obtenir les ouvrages commandés et 30% de chances d'obtenir un lot non conforme. Dans ce dernier cas, vous renvoyez au libraire le lot non conforme (à ses frais, c'est-à-dire gratuitement pour vous) et vous pouvez soit vous faire rembourser, soit demander à ce qu'il vous renvoie sans autre frais supplémentaire le lot demandé (et dans ce cas, on sait qu'on obtient ce lot avec certitude). Il n'y a jamais aucun frais de livraison pour les lots.

On suppose que vos préférences sur les conséquences de vos décisions sont représentables par une fonction d'utilité $u(x, y, z) = x + y - z$, où z est la somme d'argent que vous avez dépensée, x représente votre satisfaction d'avoir acheté le lot ($x = 10200$) ou $x = -20$ sinon, et y représente le surcoût induit par le fait de devoir renvoyer un lot non conforme au libraire : $y = -300$ dans ce cas et $y = 0$ sinon.

Dessinez l'arbre de décision correspondant à ce problème. Vous indiquerez sur les arcs sortant des nœuds de chance les expressions des probabilités correspondantes ainsi que leur valeur. Sur les feuilles de l'arbre, vous indiquerez les valeurs de la fonction d'utilité.



Exercice B (6 points – Croyance en l'engrais)

On réalise des tests pour déterminer l'efficacité d'un nouvel engrais. Pour cela, on a ajouté cet engrais à la terre de 3 serres A, B et C contenant chacune 100 arbres. Trois mois plus tard, on a mesuré de quelle hauteur les arbres des 3 serres avaient grandi et on a classé ces mesures en 4 catégories : croissance (I)nsuffisante, (T)rès moyenne, (M)oyenne et (E)levée. Les appareils de mesure étant délicats à déplacer, chaque serre possède son propre appareil. De plus, ces appareils sont peu précis. Voici les résultats obtenus :

- Dans la serre A, 20 arbres ont eu une croissance (I)nsuffisante et 30 ont eu une croissance (E)levée. L'appareil étant imprécis, on sait seulement que les arbres restants ont eu une croissance (M)oyenne voire (T)rès moyenne.
- Dans la serre B, 30 arbres ont eu une croissance (I)nsuffisante, 10 arbres ont eu une croissance (T)rès moyenne, les arbres restants ont eu une croissance (M)oyenne voire (E)levée.
- Dans la serre C, 30 arbres ont eu une croissance (M)oyenne, 30 arbres ont eu une croissance (E)levée, et les arbres restants ont eu une croissance (I)nsuffisante ou (T)rès moyenne.

Q B.1 En supposant que l'univers est représenté par l'ensemble des trois serres, donnez une expression de l'ensemble des lois de probabilités $\mathcal{P}$ compatibles avec les informations ci-dessus.

Les événements élémentaires sont ici : $\mathcal{X} = \{I, T, M, E\}$.
Les informations ci-dessus peuvent être résumées de la manière suivante :

<table>
<tr><th></th><th>I</th><th>T</th><th>M</th><th>E</th></tr>
<tr><td>Serre A :</td><td>20</td><td colspan="2">50</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Serre B :</td><td>30</td><td>10</td><td colspan="2">60</td></tr>
<tr><td>Serre C :</td><td colspan="2">40</td><td>30</td><td>30</td></tr>
</table>

Notons $\alpha = P(I)$, $\beta = P(T)$, $\gamma = P(M)$ et $\delta = P(E)$. L'ensemble $\mathcal{P}$ des lois de probas compatibles est donc l'ensemble des lois vérifiant :

$$(P) \begin{cases} \alpha \geq 50/300 & \alpha+\beta \geq 100/300 \\ \beta \geq 10/300 & \beta+\gamma \geq 90/300 \\ \gamma \geq 30/300 & \gamma+\delta \geq 150/300 \\ \delta \geq 60/300 & \alpha+\beta+\gamma+\delta = 1 \end{cases}$$

Q B.2 Montrez que $\mathcal{P}$ est non vide.

$\{\alpha = 50/300, \beta = 50/300, \gamma = 50/300, \delta = 150/300\} \in \mathcal{P}$.

Q B.3 Calculez l'enveloppe inférieure f de $\mathcal{P}$ et montrez que $\mathcal{P} = \{$ lois de probas $P : P \geq f\}$.

	$\emptyset$	I	T	M	E	I,T	I,M	I,E	T,M	T,E	M,E	I,T,M	I,T,E	I,M,E	T,M,E	$\mathcal{X}$
f	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{80}{300}$	$\frac{110}{300}$	$\frac{90}{300}$	$\frac{70}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{180}{300}$	$\frac{160}{300}$	$\frac{200}{300}$	$\frac{210}{300}$	1

Q B.4 Calculez l'inverse de Möbius ϕ de f. Montrez que f est une fonction de croyance.

	$\emptyset$	I	T	M	E	I,T	I,M	I,E	T,M	T,E	M,E	I,T,M	I,T,E	I,M,E	T,M,E	$\mathcal{X}$
f	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{100}{300}$	$\frac{80}{300}$	$\frac{110}{300}$	$\frac{90}{300}$	$\frac{70}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{180}{300}$	$\frac{160}{300}$	$\frac{200}{300}$	$\frac{210}{300}$	1
ϕ	0	$\frac{50}{300}$	$\frac{10}{300}$	$\frac{30}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{40}{300}$	0	0	$\frac{50}{300}$	0	$\frac{60}{300}$	0	0	0	0	0

f est une fonction de croyance car tous les ϕ sont positifs ou nuls et $\sum_A \phi(A) = 1$.

Q B.5 En se fondant sur le critère BEU, laquelle des trois décisions ci-dessous doit-on préférer :

– d_1 : on commercialise l'engrais à bas prix. Si l'engrais s'avère produire une croissance (I)nsuffisante, ce sera un échec commercial (conséquence R), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_1 du décideur est la suivante :

	R	S	$\{R,S\}$
w_1	0	100	70

– d_2 : on commercialise l'engrais à un prix moyen. Si l'engrais s'avère produire une croissance (I)nsuffisante ou (T)rès moyenne, ce sera un échec commercial (conséquence R), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_2 du décideur est la suivante :

	R	S	$\{R,S\}$
w_2	0	120	50

– d_3 : on commercialise l'engrais à un prix élevé. Si l'engrais s'avère produire une croissance (I)nsuffisante, (T)rès moyenne ou (M)oyenne, ce sera un échec commercial (conséquence R), sinon on aura un succès commercial (conséquence S). Dans ce cas, la fonction d'utilité w_3 du décideur est la suivante :

	R	S	$\{R,S\}$
w_3	0	150	30

On commence par traduire les événements R, S, $\{R, S\}$ en termes d'événements de $\mathcal{X}$:

	R	S	$\{R, S\}$
	I	$\{T, M, E\}$	$\mathcal{X}$
w_1	0	100	70
f	$\frac{50}{300}$	$\frac{210}{300}$	1
ϕ	$\frac{50}{300}$	$\frac{210}{300}$	$\frac{40}{300}$

	R	S	$\{R, S\}$
	$\{I, T\}$	$\{M, E\}$	$\mathcal{X}$
w_2	0	120	50
f	$\frac{100}{300}$	$\frac{150}{300}$	1
ϕ	$\frac{100}{300}$	$\frac{150}{300}$	$\frac{50}{300}$

	R	S	$\{R, S\}$
	$\{I, T, M\}$	E	$\mathcal{X}$
w_3	0	150	30
f	$\frac{180}{300}$	$\frac{60}{300}$	1
ϕ	$\frac{180}{300}$	$\frac{60}{300}$	$\frac{60}{300}$

Maintenant, on peut appliquer BEU :

$$BEU(d_1) = \tfrac{50}{300} \times 0 + \tfrac{210}{300} \times 100 + \tfrac{40}{300} \times 70 = \tfrac{238}{3}.$$
$$BEU(d_2) = \tfrac{100}{300} \times 0 + \tfrac{150}{300} \times 120 + \tfrac{50}{300} \times 50 = \tfrac{205}{3}.$$
$$BEU(d_2) = \tfrac{180}{300} \times 0 + \tfrac{60}{300} \times 150 + \tfrac{60}{300} \times 30 = \tfrac{108}{3}.$$

La décision optimale est donc d_1.