Exercices de MODE

Exercice 1 (Relations de préférences)

Soit $\succsim$ un préordre large partiel ($\Longleftrightarrow$ $\succsim$ est réflexive et transitive) sur un ensemble $\mathcal{X}$. À tout $x \in \mathcal{X}$ on associe l'application $v_x : \mathcal{X} \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$v_x(y) = 1 \text{ si } y \succsim x, \qquad \text{et } v_x(y) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que $y \succsim z \Longleftrightarrow [\ v_x(y) \geq v_x(z) \text{ pour tout } x \in \mathcal{X}\ ]$

Exercice 2 (Construction de fonctions d'utilité)

On suppose qu'un Décideur se comporte dans le risque conformément au critère Max EU et cherche à construire approximativement sa fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern u sur l'intervalle de gains [0 €, 10^5 €].
On note $(x; p \mid y; q)$ la loterie donnant le gain x avec probabilité p et le gain y avec probabilité $q = 1-p$.
Des questions posées au Décideur il ressort qu'il est indifférent :
– entre $(10^5; p \mid 0; q)$ et $(5 \times 10^4; \frac{1}{2} \mid 0; \frac{1}{2})$ pour $p = \frac{3}{8}$;
– entre $(10^5; p' \mid 0; q')$ et $(2,5 \times 10^4; \frac{1}{2} \mid 0; \frac{1}{2})$ pour $p' = \frac{1}{4}$;
– entre $(10^5; p'' \mid 0; q'')$ et $(10^4; \frac{1}{2} \mid 0; \frac{1}{2})$ pour $p'' = \frac{1}{8}$.

Q 2.1 Que peut-on imposer à u ?

Q 2.2 Représenter graphiquement (et approximativement) u. Comment qualifierait-on l'attitude vis-à-vis du risque du Décideur ?

Q 2.3 Pour vérifier la fonction u trouvée, on cherche l'équivalent-certain de $(5 \times 10^4; \frac{1}{2} \mid 10^4; \frac{1}{2})$. Que s'attend-on à trouver ?

Q 2.4 On trouve en fait un équivalent-certain égal à 2×10^4. Que peut-on proposer comme explication de ce biais ?

Exercice 3

Un Décideur a pour critère EU, avec pour utilité de vNM la fonction :

$$u(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto u(x) = 1 - e^{-rx} \qquad (r > 0)$$

Q 3.1 Quelle est l'attitude vis-à-vis du risque du Décideur ? Que peut-on dire de son *coefficient local d'aversion pour le risque* $r(x) =_{\text{DEF}} -u''(x)/u'(x)$?

Q 3.2 On considère la loterie L donnant le résultat $x_0 + a$ avec probabilité p et le résultat $x_0 - a$ avec probabilité $(1 - p)$. Calculer son espérance mathématique $E(L)$ et sa variance $V(L)$.

Q 3.3 Déterminer l'équivalent-certain $EC(L)$ de L.

Exercice 4 (Russell & Norvig (95))

Un ticket de loto coûte 1,2 €. Il y a deux résultats possibles : soit on gagne 10 € avec une probabilité de 1/50, soit 1000000 € avec une probabilité de 1/2000000.

Q 4.1 Quelle espérance de gain peut-on avoir avec un ticket de loto ?

Q 4.2 Si l'on est maximisateur d'espérance d'utilité, à quelle condition est-il rationnel d'acheter un ticket de loto ?

Q 4.3 Supposons que $u(10\,€) = 10 \times u(1{,}2\,€)$. À quelle condition sur $u(1000000\,€)$ un maximisateur d'espérance d'utilité achètera-t-il un ticket ?

Q 4.4 Des études sociologiques montrent que les personnes ayant de faibles revenus achètent un nombre de tickets de loto assez disproportionnés. Pensez-vous que c'est parce qu'ils sont de « mauvais » décideurs ou bien parce qu'ils ont des utilités différentes des décideurs à fort revenu ?

Exercice 5

Le Décideur (un patron-pêcheur) a la possibilité d'assurer son bateau, valant 100 $k€$ (milliers d'euros) et constituant sa fortune initiale, contre :
- une panne (événement A_1), de probabilité $p_1 = 1/10$, de coût 10 $k€$;
- un naufrage (événement A_2), de probabilité $p_2 = 1/100$, de coût 100 $k€$.

A_1, A_2 et $A_3 = (A_1 \cup A_2)^c$ forment une partition. Le décideur a pour critère EU, avec pour utilité de vNM $u(.)$ la fonction :

$$x \longmapsto u(x) = \begin{cases} 100(x-75) & \text{pour } x \geq 75 \\ 200(x-75) & \text{pour } x < 75 \end{cases}$$

où x est son état de fortune (exprimé en $k€$). Il a le choix entre :
- ne pas s'assurer (décision δ) ;
- s'assurer complètement avec une franchise de 5 $k€$ (décision d_1) [l'assurance rembourse le coût du sinistre moins la franchise] ;
- s'assurer à 70% (décision d_2) [l'assurance ne rembourse que 70% du coût du sinistre].

S'il s'assure, il doit payer une prime d'assurance c_1 pour d_1 et c_2 pour d_2.

Q 5.1 L'assureur fixe les montants des primes de façon que son espérance mathématique de gain soit nulle (*valeur actuarielle*). Calculer c_1 et c_2.

Q 5.2 Quelle est l'attitude vis-à-vis du risque du Décideur ? Que préfère-t-il entre les décisions δ, d_1 et d_2 ?

Q 5.3 On se place désormais dans l'hypothèse suivante : le Décideur pense que si l'assureur a à lui rembourser une somme supérieure à 5 $k€$, il y a une probabilité 1/2 qu'il lui rembourse bien toute cette somme et une probabilité 1/2 qu'il ne soit pas solvable et ne lui rembourse que 5 $k€$.

Q 5.3.1 Quelle est maintenant la meilleure décision ?

Q 5.3.2 Est-il prêt à payer, avant de prendre sa décision, 1 $k€$ à un expert capable de lui dire, immédiatement et avec certitude, si l'assureur est solvable ? (On construira l'arbre de décision correspondant à ce problème).

Exercice 6 (Décision dans le risque)

Un détaillant en ordinateurs (le décideur) peut acheter (décision A) ou non (décision $\overline{A}$) à un grossiste un lot d'écrans qui peut se révéler, après achat :
- soit être de bonne qualité (événement B), auquel cas la revente du lot lui rapportera un bénéfice net de 150 unités (milliers d'euros),
- soit être de mauvaise qualité (événement M), auquel cas il subira une perte nette de 200 unités.

Le détaillant accorde aux événements B et M les probabilités a priori :

$$P(B) = 0,6 \qquad \text{et} \qquad P(M) = 0,4.$$

Il a la possibilité de tester les marchandises avant achat. Le test, qui conclura $b =$ « B vrai » ou $m =$ « M vrai » n'est pas sûr. Le décideur accorde aux réponses possibles les probabilités :

$$P(b|B) = 0,8 \qquad P(m|B) = 0,2 \qquad P(b|M) = 0,1 \qquad P(m|M) = 0,9.$$

Le coût du test est de 10 unités. Le décideur se comporte dans le risque conformément au critère du maximum d'espérance d'utilité et son utilité de vNM est une fonction $u(\cdot)$ de ses gains nets.
Tracez l'arbre de décision du problème, en indiquant (après calcul) toutes les probabilités.

Exercice 7 (Poole, Mackworth, Goebel (98))

On s'intéresse à un robot qui doit livrer des colis dans une entreprise. Pour se rendre dans le bureau 203, il peut prendre deux trajets différentes :
– Le premier trajet passe par un escalier, suivi d'un trajet très court. Dans les escaliers, le robot risque de glisser et de tomber. Il est possible de doter le robot de protections, qui ne vont pas modifier sa probabilité de tomber, mais qui vont atténuer ses dommages en cas de chute. Malheureusement, ces protections rajoutent un poids non négligeable au robot.
– Le deuxième trajet est plus long mais il ne passe par aucun escalier et évite donc toute chute.

Q 7.1 Quelles sont les différentes décisions possibles pour le robot. Quelles utilités doivent être élicitées et quelles probabilités doivent être estimées ?

Q 7.2 Tracer un arbre de décision pour ce problème.

Exercice 8

Un robot se trouve sur la case X de la grille ci-dessous. Au départ, il possède 300 unités de fuel dont chacune coûte 1 €. Il peut se déplacer vers le haut, le bas, la gauche et la droite. Chaque déplacement d'une case à sa voisine lui coûte 100 unités de fuel. Il recherche sur l'échiquier un trésor de 600 €. Lorsqu'il le trouve, il s'arrête. La fortune finale du robot est égale à la somme d'argent que vaut le fuel qu'il lui reste plus, s'il l'a trouvé, le trésor. On suppose que le robot est suffisamment intelligent pour ne pas revenir vers une case sur laquelle il est déjà passé. Sur la grille sont indiquées les probabilités de trouver, pour chaque case, le trésor. Quelle est la stratégie optimale du robot si celui-ci est maximisateur d'espérance d'utilité ?

e 2/3	g 2/3	h 2/3
b 1/2	d 3/4	f 5/6
X	a 3/4	c 1/4

Exercice 9

On considère le problème de décision dans l'incertain représenté sur l'arbre de décision de la figure 1, où ϵ est un gain arbitrairement petit.

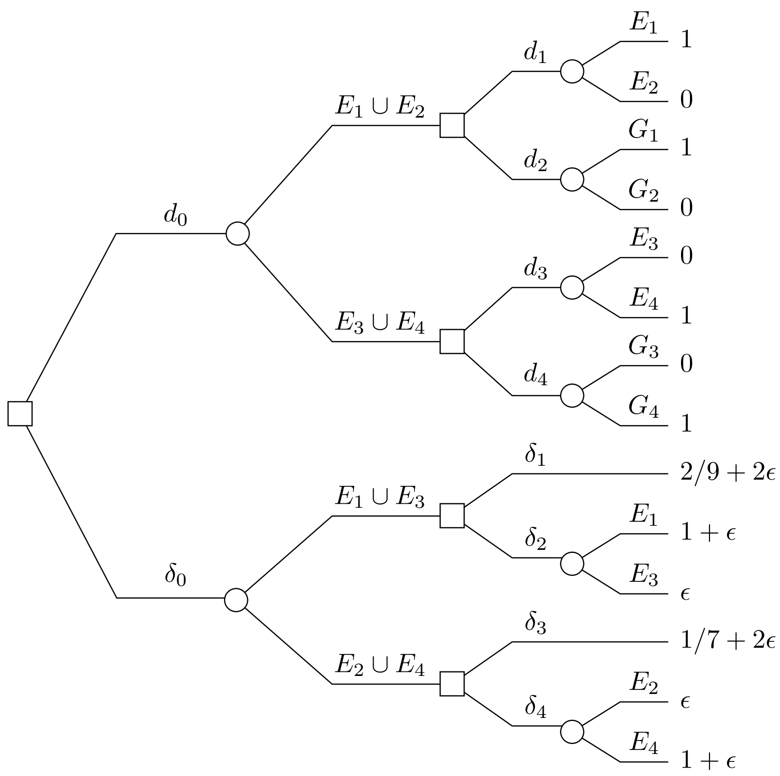


FIGURE 1 – Un arbre de décision

On note $e_i, \in \{1, \ldots, 8\}$, les événements élémentaires et les E_j et G_j sont définis par :

$$E_1 = e_1 \cup e_2 \qquad E_2 = e_3 \cup e_4 \qquad E_3 = e_5 \cup e_6 \qquad E_4 = e_7 \cup e_8,$$
$$G_1 = e_1 \cup e_3 \qquad G_2 = e_2 \cup e_4 \qquad G_3 = e_5 \cup e_7 \qquad G_4 = e_6 \cup e_8.$$

L'information initiale est caractérisée par une probabilité inférieure Π, qui a pour transformée de Möbius ϕ, dont les seules valeurs non nulles sont :

$$\phi(E_1 \cup E_2) = 1/4 \qquad \phi(E_3 \cup E_4) = 3/8 \qquad \phi(E_1) = \phi(E_2) = 1/8 \qquad \phi(E_3) = \phi(E_4) = 1/16.$$

Le décideur révise ses probabilités inférieures par la « règle de Bayes généralisée » :

$$\Pi(A|B) = \frac{\Pi(A)}{\Pi(A) + 1 - \Pi(A \cup B^c)}.$$

Lorsque son information est « B est réalisé », il a pour critère l'intégrale de Choquet des gains par rapport à la capacité $\Pi(\cdot|B)$.

Q 9.1 Déterminez la stratégie de décision optimale du décideur dans les 4 nœuds de décisions les plus à droite de l'arbre.

Q 9.2 Déterminez la stratégie de décision optimale du décideur à la racine de l'arbre lorsqu'il se comporte de façon « sophistiquée », c'est-à-dire qu'il analyse ses possibilités de choix réelles en remontant l'arbre de décision.

Q 9.3 Montrez que cette stratégie est dominée.

Exercice 10

Un producteur de pétrole a prospecté un même terrain à l'aide de deux techniques différentes, qui ont apporté les conclusions suivantes :

1. le terrain contient du pétrole brut ou du gaz avec une probabilité 3/4 (et ne contient rien avec une probabilité 1/4) ;
2. le terrain contient du gaz avec une probabilité au moins égale à 1/2, et il ne peut contenir à la fois du gaz et du pétrole.

On prendra comme événements élémentaires B = « présence de pétrole brut », G = « présence de gaz », R = « absence de l'un et l'autre ». On posera $\mathcal{X} = B \cup G \cup R$ et $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{X}}$. On notera $\mathcal{L}$ l'ensemble des lois de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Q 10.1 Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des lois de probabilité compatibles avec l'information reçue.

Q 10.1.1 Donnez une expression de $\mathcal{P}$ et vérifiez que $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

Q 10.1.2 Calculez $f = \inf_{P \in \mathcal{P}} P$ et $F = \sup_{P \in \mathcal{P}} P$.

Q 10.1.3 Soit $\mathcal{P}_f = \{P \in \mathcal{L} : P \geq f\}$. Montrez que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$.

Q 10.1.4 Calculez l'inverse de Möbius ϕ de f. Montrez que f est une fonction de croyance sur $\mathcal{A}$.

Q 10.2 Le décideur a le choix entre les décisions :
- d', ne pas forer, avec un bénéfice 0
- d'', forer, avec un résultat incertain, et les bénéfices :
  $d''(B) = 100$, $d''(G) = 0$, $d''(R) = -20$.

On posera $\mathcal{C} = \{-20, 0, 100\}$ et $\mathcal{E} = 2^{\mathcal{C}}$. $\mathcal{G}$ représentera l'ensemble des fonctions de croyance sur $\mathcal{E}$.

Q 10.2.1 Montrez que l'incertitude sur le résultat de la décision d'' peut être caractérisée par une fonction de croyance f'' sur $\mathcal{E}$ se déduisant simplement de f.

Q 10.2.2 Sachant que les préférences du décideur dans $\mathcal{G}$ vérifient les axiomes de la théorie de l'utilité linéaire et que :
- dans l'incertain probabilisé il est adversaire du risque ;
- son critère de décision est :

$$U(f) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \phi(A) \times [\alpha u(m_A) + (1 - \alpha) u(M_A)],$$

  où f est une fonction de croyance, ϕ son inverse de Möbius, et m_A et M_A représentent respectivement la pire et la meilleure conséquence possibles lorsque l'événement A survient. $\alpha = 0,8$ est le coefficient local de pessimisme constant du décideur.

Quelle décision prend le producteur de pétrole ?

Exercice 11

Un agriculteur a le choix entre ensemencer ses champ en blé (décision B) ou en maïs (décision M). Une récolte de blé est bonne et lui rapporte 1000 unités monétaires quand le temps est sec (événement S), elle est mauvaise et lui rapporte 100 (unités) quand le printemps est humide (événement H). Au contraire, une récolte de maïs lui rapporte 500 si H et 200 si S. L'agriculteur estime que $P(S) = 1/3$ et $P(H) = 2/3$.

L'agriculteur peut soit faire son choix entre B et M immédiatement (décision $\neg At$), soit attendre de savoir si une loi accordant une aide en cas de mauvaise récolte de blé sera votée (événement L) ou rejetée (événement R). Si la loi est votée, l'aide sera de 400 pour l'agriculteur. Cependant, tout retard à l'ensemencement, en blé comme en maïs, diminuera la valeur de sa récolte de 100. L'agriculteur est dans l'ignorance totale concernant $P(L) = 1 - P(R)$, mais il pense que L et R sont indépendants en probabilité de S et H.

Q 11.1 Montrez que la situation d'incertitude peut être décrite à l'aide d'une algèbre d'événements $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{X}}$, où $|\mathcal{X}| = 4$, et que la famille de lois $\mathcal{P}$ compatibles avec les informations ci-dessus peut être décrite à l'aide d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\lambda = \{P_\lambda : \lambda \in [0, 1]\}$.

Q 11.2 Montrez que la situation d'incertitude peut également être décrite à l'aide de sa probabilité inférieure f et d'une condition que l'on précisera.

Q 11.3 Déterminez l'inverse de Möbius ϕ de f. f est-elle une une fonction de croyance ?

Q 11.4 Montrez que f n'est pas convexe, c'est-à-dire qu'elle n'est pas monotone d'ordre 2.

Q 11.5 Sachant que l'utilité (de vNM) de l'agriculteur est $u : x \mapsto \sqrt{x}$, tracez l'arbre de décision du problème. Sur les branches sortant des nœuds de chance, vous indiquerez seulement les événements correspondants. Sur les feuilles, vous indiquerez les valeurs de l'utilité de vNM.

Q 11.6 Dans ce type de situation d'incertitude, l'agriculteur obéit au critère d'Hurwicz, avec coefficient de pessimisme α et utilité de vNM $u : x \mapsto \sqrt{x}$, autrement dit :

$$U(f) = \alpha \inf_{P \in \mathcal{P}} E_P u \circ f + (1 - \alpha) \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P u \circ f.$$

Exercice 12 (Décision avec un critère RDU)

Q 12.1 Soit $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ un ensemble de conséquences. La relation de préférences $\succsim_{\mathcal{X}}$ du décideur sur $\mathcal{X}$ coïncide avec la relation $\geq$. Soient deux loteries $P = \langle (x_1, p_1); \ldots ; (x_n, p_n)\rangle$ et $Q = \langle (y_1, p_1); \ldots ; (y_n, p_n)\rangle$ où les x_i et les y_i sont triés par ordre croissant de preférence sur l'espace des conséquences. Autrement dit, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots , n\}$ tel que $x_i = y_i$ pour tout $i \neq i_0$, et tel que $y_{i_0} \in]x_{i_0}, x_{i_0+1}[$ si $i_0 < n$ et $y_{i_0} \in]x_{i_0}, +\infty[$ sinon. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P.

Q 12.2 Soient deux loteries $P = \langle (x_1, p_1); \ldots ; (x_n, p_n)\rangle$ et $Q = \langle (x_1, q_1); \ldots ; (x_n, q_n)\rangle$ où les x_i sont triés par ordre croissant de preférence. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots , n - 1\}$ tel que $p_i = q_i$ pour tout $i \notin \{i_0, i_0 + 1\}$, et tel que $q_{i_0} = p_{i_0} - \alpha$ et $q_{i_0+1} = p_{i_0+1} + \alpha$, pour un α positif. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P.

Q 12.3 Soient deux loteries $P = \langle (x_1, p_1); \ldots ; (x_n, p_n)\rangle$ et $Q = \langle (y_1, q_1); \ldots ; (y_n, q_n)\rangle$ où les x_i et les y_i sont triés par ordre croissant de preférence. Supposons que, pour tout i, $y_i \geq x_i$ et que $\sum_{k=i}^{n} q_k \geq \sum_{k=i}^{n} p_k$. Montrez que, selon le critère RDU, la loterie Q est préférée à P.

Exercice 13 (Choquet expected utility et Belief expected utility)

Afin d'éviter une rupture de stock, un site de vente sur le web doit planifier le réapprovisionnement du stock de ses produits A, B, C, D, pour le mois prochain (à cause des délais de livraison, cette tâche doit être planifiée à l'avance). On supposera qu'un seul produit viendra à manquer à la fin du mois. Au moment où il doit choisir les produits qu'il va acheter, le gestionnaire du site ne sait pas exactement ce que les clients vont lui acheter pendant le mois et ne peut donc connaître avec certitude lequel des produits nécessitera un réapprovisionnement. Cela dit, en se fondant sur des statistiques des mois précédents, il possède les informations suivantes :
– il y au moins 10% de chances que ce soit le produit A qui vienne à manquer ;
– il y au moins 20% de chances que ce soit l'un des produits A ou B ;
– il y au moins 10% de chances que ce soit l'un des produits A ou C ;
– il y au moins 30% de chances que ce soit l'un des produits A ou D ;
– il y au moins 20% de chances que ce soit l'un des produits B ou D ;
– il y au moins 20% de chances que ce soit l'un des produits C ou D ;
– il y au moins 20% de chances que ce soit l'un des produits A, B ou C ;
– il y au moins 70% de chances que ce soit l'un des produits A, B ou D ;

– il y au moins 60% de chances que ce soit l'un des produits A, C ou D ;
– il y au moins 40% de chances que ce soit l'un des produits B, C ou D.

Q 13.1 Déterminez la fonction de croyance f correspondant à ces informations ainsi que son inverse de Möbius ϕ.

Q 13.2 Le gestionnaire envisage trois décisions possibles :
– d_1 : achat de quelques unités de produits A et D. L'utilité associée à cette décision est : $u_1(B) = u_1(C) = 1$ et $u_1(A) = u_1(D) = 20$, où $u_1(X)$ représente l'utilité résultant de la décision d_1 si le produit X vient à manquer à la fin du mois ;
– d_2 : achat de quelques unités de produits A, B et D. L'utilité associée à cette décision est : $u_2(A) = 21$, $u_2(B) = 10$, $u_2(C) = 0$, $u_2(D) = 30$;
– d_3 : achat de quelques unités de produits A, B, C et D. L'utilité associée à cette décision est : $u_3(A) = 25$, $u_3(B) = 20$, $u_3(C) = 10$, $u_3(D) = 5$.

Calculez l'utilité de chaque décision selon CEU (Choquet expected utility) et déterminez la décision optimale selon ce critère.

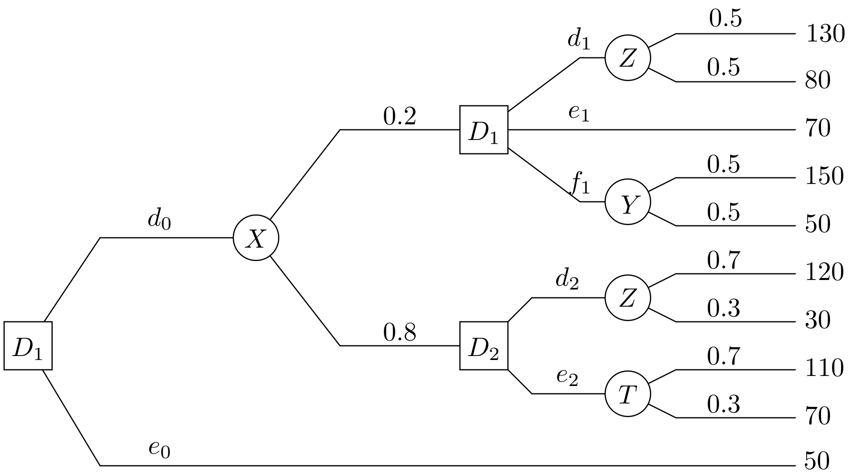
Q 13.3 Notre critère de décision est maintenant BEU (Belief expected utility). Suivant le produit venant à manquer et la décision qu'il a prise, le gestionnaire peut maintenant être très satisfait (T), satisfait (S) ou bien insatisfait (I). L'utilité de ces différentes possibilités est la suivante, où $u(\{X, Y\})$ représente l'utilité d'obtenir la satisfaction X ou la satisfaction Y :

	I	S	T	$\{I,S\}$	$\{I,T\}$	$\{S,T\}$	$\{I,S,T\}$
u	0	50	100	20	40	70	60

Calculez l'utilité, selon BEU, des deux décisions ci-dessous :
– la d_1 implique que le gestionnaire est très satisfait si A ou D se produisent, satisfait si B se produit, et insatisfait si C se produit ;
– la d_2 implique que le gestionnaire est très satisfait si A se produit, satisfait si B ou C se produisent, et insatisfait si D se produit.

Exercice 14 (Rank dependent utility)

On considère l'arbre de décision ci-dessous. Sur les feuilles sont indiquées les utilités du décideur.



Supposons que le décideur utilise un critère RDU avec pour fonction de déformation des probabilités φ la fonction affine par morceaux dont les segments sont définis par :

p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$	p	$\varphi(p)$
0	0	0,1	0,3	0,2	0,4	0,3	0,55	0,4	0,65
0,46	0,68	0,5	0,7	0,56	0,75	0,6	0,77	0,66	0,8
0,7	0,84	0,76	0,87	0,8	0,9	0,9	0,95	1	1

Q 14.1 Déterminer la valeur de RDU aux nœuds D_1 et D_2.

Q 14.2 Déterminer la valeur de RDU pour l'ensemble des stratégies à la racine D_0.

Q 14.3 Déterminer la stratégie optimale selon RDU à la racine de l'arbre.

Exercice 15 (Des choux et des carottes)

Une entreprise agricole possède 2000 hectares de champs et souhaite y planter des choux et/ou des carottes. D'après un de ses agronomes, suivant les conditions climatiques futures (précipitations, chaleur, etc), ces deux cultures vont être plus ou moins productives. L'agronome a partitionné l'ensemble des conditions climatiques en les 5 conditions $\omega_1, \ldots, \omega_5$ suivantes :

- Si ω_1 se produit, les choux pousseront bien mais pas les carottes ;
- Si ω_2 se produit, les carottes pousseront bien, mais on ne sait pas ce que cela aura comme impact sur les choux ;
- Si ω_3 se produit, ni les carottes ni les choux ne pousseront ;
- Si ω_4 se produit, les carottes et les choux pousseront bien tous les deux ;
- Si ω_5 se produit, on ne sait pas ce qui arrivera.

Après étude, l'agronome a pu déterminer les probabilités d'apparition des ω_i :

$$P(\omega_1) = 0,1 \qquad P(\omega_2) = 0,2 \qquad P(\omega_3) = 0,3 \qquad P(\omega_4) = 0,1 \qquad P(\omega_5) = 0,3.$$

Q 15.1 Soit H l'événement correspondant au fait que les choux poussent bien et A celui correspondant au fait les carottes poussent bien. Soit $\mathcal{A} = \{(H, A), (\overline{H}, A), (H, \overline{A}), (\overline{H}, \overline{A})\}$. Donnez une expression de l'ensemble des lois de probabilités $\mathcal{P}$ définies sur $(\mathcal{A}, 2^{\mathcal{A}})$ et compatibles avec les informations ci-dessus.

Q 15.2 Montrez que $\mathcal{P}$ est non vide.

Q 15.3 Calculez l'enveloppe inférieure f de $\mathcal{P}$ ainsi que son inverse de Möbius.

Q 15.4 La fonction f est-elle une fonction de croyance ? Vous justifierez votre réponse.

Q 15.5 L'entreprise a décidé de planter dans ses champs pour moitié des choux et pour moitié des carottes. En fonction des conditions climatiques, cela peut avoir les 3 conséquences suivantes :

- C_1 : aucune des 2 cultures n'a poussé ;
- C_2 : une des deux cultures a poussé mais pas l'autre ;
- C_3 : les deux cultures ont bien poussé.

Les choux et les carottes rapportent le même bénéfice à l'entreprise. Aussi, sa fonction d'utilité ne dépend-elle que de la quantité de légumes produits. L'utilité de l'entreprise est définie par :

	C_1	C_2	C_3	$C_1 \cup C_2$	$C_1 \cup C_3$	$C_2 \cup C_3$	$C_1 \cup C_2 \cup C_3$
u	0	10	40	5	7	20	12

Selon le critère BEU, quelle est la valeur de l'utilité de l'entreprise. Vous justifierez votre réponse.

Exercice 16 (Fonctions de croyance)

Soit l'inverse de Möbius suivante :

	$\emptyset$	A	B	C	D	A,B	A,C	A,D	B,C	B,D	C,D	A,B,C	A,B,D	A,C,D	B,C,D	$\mathcal{X}$
ϕ	0	0,1	0	0,1	0	0,1	0,1	0	0,2	0,1	0	0,1	0,2	0	0	0

Q 16.1 Déterminez la fonction de croyance associée à cette inverse de Möbius.

Q 16.2 Le décideur se fonde sur le critère BEU. Il a trois alternatives à sa disposition : d_1, d_2, d_3. Chacune d'elles peut engendrer les conséquences X, Y ou Z. La fonction d'utilité u du décideur sur ces conséquences est la suivante :

	$\emptyset$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Z\}$	$\{X,Y\}$	$\{X,Z\}$	$\{Y,Z\}$	$\{X,Y,Z\}$
u	0	10	20	30	50	80	100	120

Calculez la valeur de chacune des trois alternatives suivantes selon le critère BEU :
- d_1 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'un des événements A ou B se produit, Y si C se produit, et Z si D se produit.
- d_2 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'événement C se produit, Y si B ou D se produisent, et Z si A se produit.
- d_3 : si l'on prend cette décision, on obtiendra X si l'événement B se produit, Y si A se produit, et Z si C ou D se produisent.

Exercice 17 (Mean Preserving Spread)

Soit les deux loteries :

$P = \langle(5;0,15),(7;0,35),(9;0,35),(13;0,15)\rangle$

$Q = \langle(5;0,1),(6;0,1),(7;0,2),(8;0,2),(9;0,1),(10;0.1),(11;0.1),(12;0,1)\rangle$

Q 17.1 P est-il un mean preserving spread de Q ? Q est-il un mean preserving spread de P ? Vous justifierez votre réponse.

Q 17.2 Selon Rothschild et Stiglitz, un décideur adversaire du risque préférerait-il P ou Q ?