MODE — cours 3: fonctions de croyance et décisions séquentielles

Christophe Gonzales

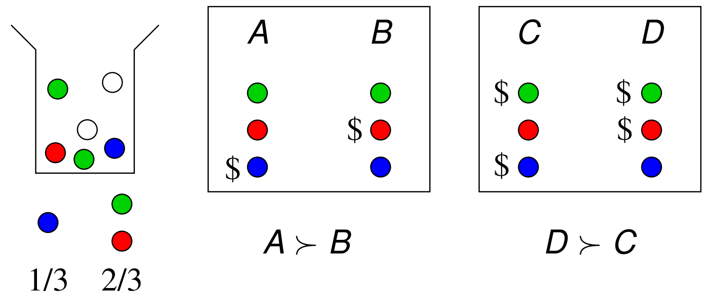
LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours 3

1. Fonctions de croyance
2. Modèles décisionnels avec fonctions de croyance
3. Décisions séquentielles avec EU
4. Décisions séquentielles avec RDU

1 Les fonctions de croyance

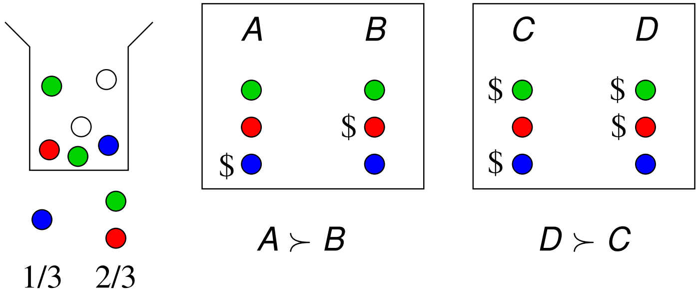
Retour à l'urne d'Ellsberg



Violation du Sure thing principle

Peut-on représenter ≻ par RDU ?

L'urne d'Ellsberg et RDU



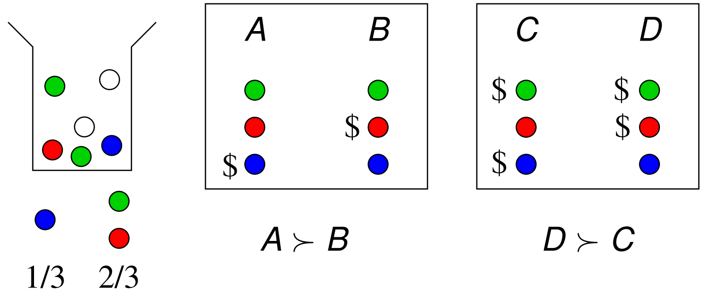
Probas P_r, P_b, P_v

$A \succ B \Longleftrightarrow \varphi(P_b) > \varphi(P_r)$

$D \succ C \Longleftrightarrow \varphi(P_r + P_v) > \varphi(P_b + P_v)$

or φ croissante $\Longrightarrow$ RDU impossible

L'urne d'Ellsberg et les capacités



Problème : $\varphi(P_b) > \varphi(P_r)$ et $\varphi(P_r + P_v) > \varphi(P_b + P_v)$

Définition d'une capacité

- fonction μ des sous-ensembles de $\mathcal{S}$ dans $[0, 1]$
- $\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathcal{S}) = 1$
- monotone : $\forall A \subset B \subseteq \mathcal{S}, \mu(A) \leq \mu(B)$

Les fonctions de croyance

L'urne d'Ellsberg $\Longrightarrow$ capacités à la Choquet

capacités $\stackrel{?}{\Longrightarrow}$ représentation des incertitudes

Théorie des fonctions de croyance

Les fonctions de croyance

Fonction de croyance (Dempster-Shafer)

- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature
- $\mathcal{A}$: ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{S}$
- $\mu : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ fonction de croyance :
  - $\mu(\emptyset) = 0, \qquad \mu(\mathcal{S}) = 1$
  - μ monotone d'ordre ∞ : $\forall n \geq 2, \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{\emptyset \subset I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

Ordre 1 : $\forall A \subseteq B \subseteq \mathcal{S}, \mu(A) \leq \mu(B)$

$\Longrightarrow$ capacités à la Choquet

Ordre 2 : $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

L'inverse de Möbius

Définition de l'inverse de Möbius

Fonction $\phi : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ définie par :

$$\phi(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B)$$

Expression de la fonction de croyance

$$\mu(A) = \sum_{B \subseteq A} \phi(B)$$

Proposition

μ définie à partir de ϕ est une fonction de croyance ssi :

- $\phi(\emptyset) = 0$
- $\sum_{B \subseteq \mathcal{S}} \phi(B) = 1$
- $\forall B \subseteq \mathcal{S}, \phi(B) \geq 0$

Exemple : le camionneur

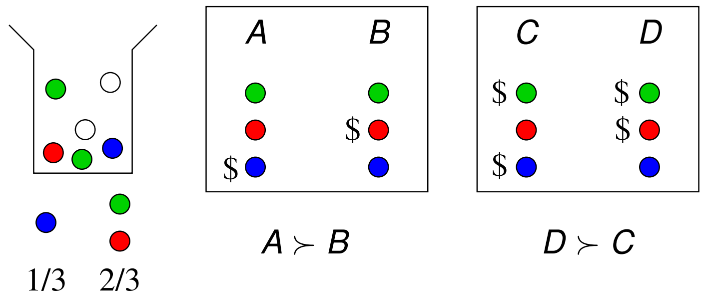
pièces de rechange : $\begin{cases} \text{G(ood)} \\ \text{A(cceptable)} \\ \text{B(ad)} \end{cases}$

Information : au plus la moitié des pièces est d'un type donné

A	$\emptyset$	$\{G\}$	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{G, A\}$	$\{G, B\}$	$\{A, B\}$	$\mathcal{S}$
μ	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1
ϕ	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	−1/2

$\Longrightarrow$ μ n'est pas une fonction de croyance

Exemple : l'urne d'Ellsberg



Evt	$\emptyset$	$\{B\}$	$\{R\}$	$\{V\}$	$\{B, R\}$	$\{B, V\}$	$\{R, V\}$	$\mathcal{S}$
μ	0	1/3	0	0	1/3	1/3	2/3	1
ϕ	0	1/3	0	0	0	0	2/3	0

Propriétés et vocabulaire

- $\phi \Longrightarrow$ masses de Möbius
- $\phi(B) > 0$: éléments focaux
- éléments focaux = singletons $\Longleftrightarrow$ μ = proba
- fonction de croyance = enveloppe inférieure de lois de proba

2 Modèles décisionnels

avec fonctions de croyance

Décisions avec des fonctions de croyance

- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature
- $\mathcal{A}$: ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{S}$
- $f : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ fonction de croyance (d'inverse de Möbius ϕ)
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences
- $\mathcal{Y}$: ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{X}$
- décision $\delta \equiv$ acte = fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$

$\Longrightarrow \forall Y \in \mathcal{Y},\ g(Y) = f(\delta^{-1}(Y)) =$ incertitude sur l'obtention de Y en prenant la décision δ

g est une fonction de croyance

$\psi : \mathcal{Y} \mapsto [0, 1]$ définie par $\psi(Y) = \sum_{\delta(B)=Y} \phi(B)$ est l'inverse de Möbius de g

Généralisation de EU (1/5)

Généralisation de vNM aux fonctions de croyance

$\mathcal{F} =$ ensemble de toutes les fonctions de croyance sur $\mathcal{Y}$

Mixage de fonctions de croyance

$\forall f, g \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in [0, 1], h = \lambda f + (1 - \lambda) g \in \mathcal{F}$:
fonction de croyance

$\forall Y \in \mathcal{Y},\ \ h(Y) = \lambda f(Y) + (1 - \lambda) g(Y)$

$\Longrightarrow$ comme dans von Neumann-Morgenstern, on va exprimer $\succsim$ sur l'espace des mixages de fonctions de croyance $\mathcal{F}$

Généralisation de EU (2/5)

Axiome 1 : Préordre total

$\succsim$ est un préordre large total sur $\mathcal{F}$

Axiome 2 : continuité

$\forall f, g, h \in \mathcal{F}$ tels que $f \succ g \succ h$, $\exists \alpha, \beta \in]0, 1[$ tels que :

$$\alpha f + (1 - \alpha) h \succ g \succ \beta f + (1 - \beta) h.$$

Axiome 2 : Indépendance

$\forall f, g, h \in \mathcal{F}, \forall \alpha \in]0, 1[$:

$$f \succ g \Longrightarrow \alpha f + (1 - \alpha) h \succ \alpha g + (1 - \alpha) h.$$

Généralisation de EU (3/5)

Théorème (von Neumann-Morgenstern)

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\succsim$ sur $\mathcal{F}$ vérifie les axiomes 1, 2, 3
2. $\succsim$ est représentable par $U : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ telle que :
   - $\forall f, g \in \mathcal{F}, f \succsim g \Longleftrightarrow U(f) \geq U(g)$
   - U est linéaire sur $\mathcal{F}$, i.e., $\forall f, g \in \mathcal{F}, \ \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$U(\lambda f + (1 - \lambda)g) = \lambda U(f) + (1 - \lambda)U(g)$$

De plus, U est unique à une transformation affine strictement positive près

Par récurrence : $\forall \lambda_i \geq 0$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ U\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(f_i)$

Généralisation de EU (4/5)

Fonction de croyance élémentaire concentrée sur B

fonction de croyance e_B telle que :

$$e_B(A) = 1 \text{ si } A \supseteq B \quad \text{et} \quad e_B(A) = 0 \text{ sinon}$$

$\Longrightarrow$ inverse de Möbius ψ_B telle que $\psi_B(B) = 1$

Ensemble focal

- f fonction de croyance d'inverse de Möbius ψ
- $\mathcal{C}_f$ = ensemble focal de f = $\{B : \psi(B) > 0\}$

$\Longrightarrow \forall$ fonction de croyance f et $\forall$ événement A :

$$f(A) = \sum_{B \subseteq A} \psi(B) = \sum_{B \in \mathcal{C}_f} \psi(B) e_B(A)$$

$$f = \sum_{B \in \mathcal{C}_f} \psi(B) e_B$$

Généralisation de EU (5/5)

Rappel : $U\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(f_i)$

Or $f = \sum_{B \in \mathcal{C}_f} \psi(B) e_B \Longrightarrow U(f) = \sum_{B \in \mathcal{C}_f} \psi(B) U(e_B)$

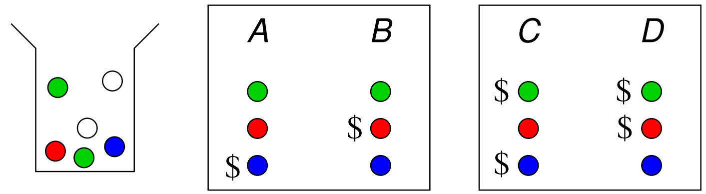
Belief expected utility

- f : fonction de croyance
- ψ : inverse de Möbius
- $BEU(f) = \sum_{B \in \mathcal{C}_f} \psi(B) w(B)$

  où $w(B) = U(e_B)$ = utilité de l'ensemble de conséquences B

  = utilité d'une croyance e_B dont le seul élément focal est B

BEU et l'urne d'Ellsberg



Evts	0	$\$$	$\{0, \$\}$
boules	$\{R, V\}$	$\{B\}$	$\mathcal{S}$
μ	2/3	1/3	1
ϕ	2/3	1/3	0

$BEU(A) = 2/3w(\{0\}) + 1/3w(\{\$\}) = 1/3$

Evts	0	$\$$	$\{0, \$\}$
boules	$\{B, V\}$	$\{R\}$	$\mathcal{S}$
μ	1/3	0	1
ϕ	1/3	0	2/3

$BEU(B) = 1/3w(\{0\}) + 2/3w(\{0, \$\}) = 2/3\alpha$

Evts	0	$\$$	$\{0, \$\}$
boules	$\{R\}$	$\{B, V\}$	$\mathcal{S}$
μ	0	1/3	1
ϕ	0	1/3	2/3

$BEU(C) = 1/3w(\{\$\}) + 2/3w(\{0, \$\})$

Evts	0	$\$$	$\{0, \$\}$
boules	$\{B\}$	$\{R, V\}$	$\mathcal{S}$
μ	1/3	2/3	1
ϕ	1/3	2/3	0

$BEU(D) = 1/3w(\{0\}) + 2/3w(\{\$\}) = 2/3$

Le modèle de Jaffray (1/3)

Problème de BEU :

$$BEU(f) = \sum_{B \in \mathcal{C}_f} \phi(B)w(B) \Longrightarrow w \text{ doit être défini sur } \mathcal{C}_f \text{ (voire } \mathcal{Y} = 2^{\mathcal{X}})$$

en comparaison : $EU(P) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x)u(x) \Longrightarrow u$ défini sur $\mathcal{X}$

$\Longrightarrow$ EU nécessite moins d'élicitation d'utilité

Le modèle de Jaffray (2/3)

Axiome 4 : Dominance

- $\forall B \in \mathcal{Y}$: $m_B =$ la pire des conséquences dans B
- $\forall B \in \mathcal{Y}$: $M_B =$ la meilleure des conséquences dans B
- $\forall B \in \mathcal{Y}$: e_B fonction de croyance élémentaire concentrée en B
- $\forall B, B' \in \mathcal{Y}$, si $m_B \succsim_{\mathcal{X}} m_{B'}$ et $M_B \succsim_{\mathcal{X}} M_{B'}$ alors $e_B \succsim e_{B'}$

Idée :

aucune information sur les sous-événements inclus dans B
$\Longrightarrow$ décider en fonction de la pire et de la meilleure conséquence

Le modèle de Jaffray (3/3)

Théorème — Jaffray (89)

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\succsim$ sur $\mathcal{F}$ vérifie les axiomes 1, 2, 3, 4
2. $\succsim$ est représentable par $U : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ telle que :
   - $\forall f, g \in \mathcal{F}$, $f \succsim g \Longleftrightarrow U(f) \geq U(g)$
   - $\exists v$ définie sur $\mathcal{M} = \{(m, M) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : M \succsim_{\mathcal{X}} m\}$ t.q. :
     $$U(f) = \sum_{B \in \mathcal{C}_f} \psi(B)v(m_B, M_B)$$
   - U et v sont uniques à une transformation affine croissante commune près
   - v est une fonction non décroissante en m et en M
   - $u(x) = v(x, x)$ est une utilité de vNM

Le critère d'Hurwicz

Modèle de Jaffray $\Longrightarrow v$ défini sur $|\mathcal{X}|^2$ éléments

$$v(m, M) \Longrightarrow \text{attitude} \begin{cases} \text{vis à vis du risque} \\ \text{vis à vis de l'ambiguïté} \end{cases}$$

Critère d'Hurwicz

$\forall (m, M) \in \mathcal{M}$, $\alpha(m, M) =$ critère local d'optimisme/pessimisme

$\alpha(m, M) =$ valeur de α pour laquelle le décideur est indifférent entre recevoir :

1. m avec la proba α et M avec la proba $1 - \alpha$
2. au moins m et au plus M, sans autre information

$$v(m, M) = \alpha(m, M)u(m) + [1 - \alpha(m, M)]u(M)$$

pessimisme : $\alpha(m, M) = 1$ optimisme : $\alpha(m, M) = 0$

3 Décisions séquentielles avec EU

Rappel : Utilité espérée

Loteries et espérance d'utilité

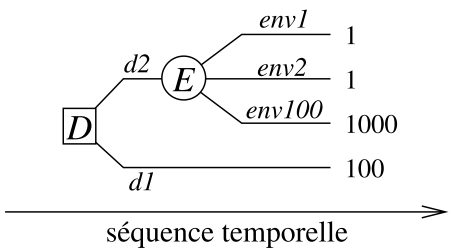
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature
- acte : fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
- $\mathcal{V}$: ensemble des applications de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{X}$
- $\succsim_{\mathcal{D}}$: relation de préférence sur $\mathcal{V}$
- $f \in \mathcal{V} \Longrightarrow P_f$ sur $(\mathcal{X}, 2^{\mathcal{X}})$
- $\mathcal{L}$: loteries, ensemble des lois à support fini sur $\mathcal{X}$
  $f \Longrightarrow P_f = \langle c_1, p_1; \ldots; c_n, p_n \rangle$, avec $c_1 \precsim_{\mathcal{X}} c_2 \precsim_{\mathcal{X}} \cdots \precsim_{\mathcal{X}} c_n$
  $\succsim_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \succsim$ sur $\mathcal{L}$
- $\succsim$ est représentable par U telle que
  $$U(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(c_i),$$
  où $u(c_i) = U(\langle c_i, 1 \rangle)$.

Les Arbres de décision

Exemple

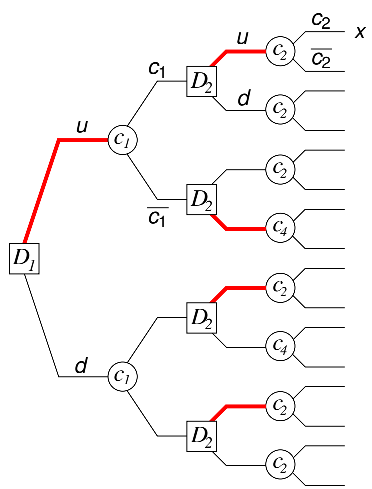
- enveloppe 1 contient 100 €
- enveloppe 2 choisie parmi une pile de 100 enveloppes dont 3 contiennent 1000 € et 97 contiennent 1 €

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{enveloppe 1 = 100 €} \\ \text{enveloppe 2 = 3 chances sur 100 d'avoir 1000 € et} \\ \qquad\qquad\quad \text{97 chances sur 100 d'avoir 1 €} \end{cases}$$



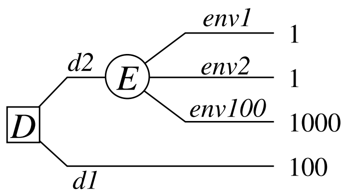
carrés = décisions ronds = nœuds de chance

Décisions séquentielles (1/3)



x = conséquence si $D_1 = u$, $C_1 = c_1$, $D_2 = u$, $C_2 = c_2$

Décisions séquentielles (2/3)



$\Rightarrow$ la décision optimale est celle dont la moyenne des utilités des conséquences est la plus élevée

$d_1 \equiv$ loterie $L_1 = \langle 100, 1\rangle$
$d_2 \equiv$ loterie $L_2 = \langle 1, 0.97;\ \ 1000, 0.03\rangle$

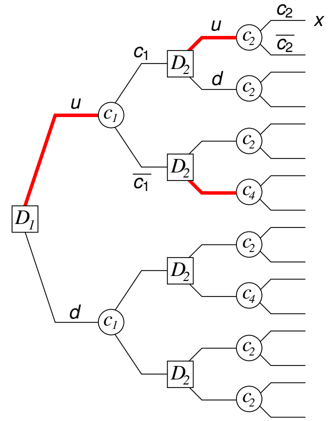
$EU(d_1) = EU(L_1) = 100$
$EU(d_2) = EU(L_2) = 0,97 \times 1 + 0,03 \times 1000 = 30,97$

$\Longrightarrow$ décision optimale selon EU : d_1

Décisions séquentielles (3/3)

Stratégie

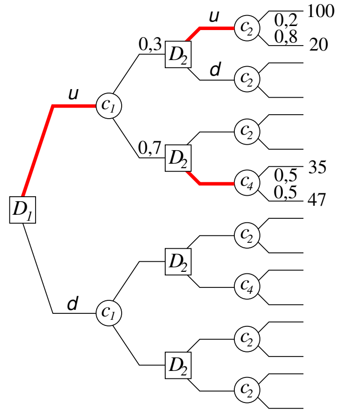
Une stratégie de décision = la sélection en tout sommet de décision D de l'arbre accessible compte tenu des décisions prises précédemment, d'une décision d appartenant à l'ensemble des décisions réalisables de ce sommet.



Décisions séquentielles (3/3)

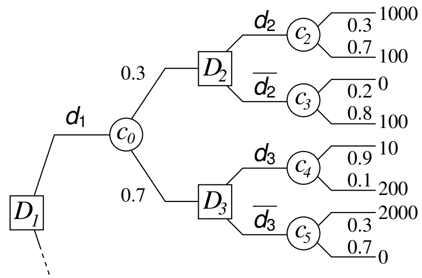
Stratégie et espérance d'utilité

- À toute stratégie correspond une loterie
- critère d'optimalité = espérance max sur les loteries



loterie = $\langle 20,\ 0.24;\ \ 35,\ 0.35;\ \ 47,\ 0.35;\ \ 100,\ 0.06\rangle$

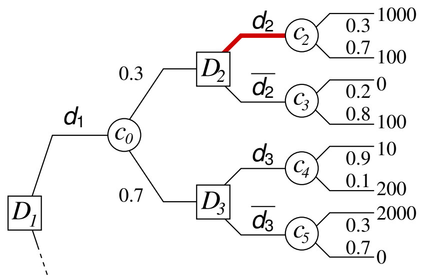
Calculs dans un arbre de décision (1/5)



Stratégie $S_1 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = d_3\rangle\rangle$
$\equiv \langle 10, 0.7 \times 0.9;\ 100, 0.3 \times 0.7,\ 200, 0.7 \times 0.1,\ 1000, 0.3 \times 0.3\rangle$
$E(S_1) = 0.3 \times [0.7 \times 100 + 0.3 \times 1000] + 0.7 \times [0.9 \times 10 + 0.1 \times 200]$
$= 0.3 \times E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle) + 0.7 \times E(\langle\langle D_3 = d_3\rangle\rangle)$

Stratégie $S_2 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = \overline{d_3}\rangle\rangle$
$\equiv \langle 0, 0.7 \times 0.7;\ 100, 0.3 \times 0.7,\ 1000, 0.3 \times 0.3,\ 2000, 0.7 \times 0.3\rangle$
$E(S_2) = 0.3 \times [0.7 \times 100 + 0.3 \times 1000] + 0.7 \times [0.7 \times 0 + 0.3 \times 2000]$
$= 0.3 \times E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle) + 0.7 \times E\left(\langle\langle D_3 = \overline{d_3}\rangle\rangle\right)$

Calculs dans un arbre de décision (2/5)



Stratégie $S_1 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = d_3\rangle\rangle$

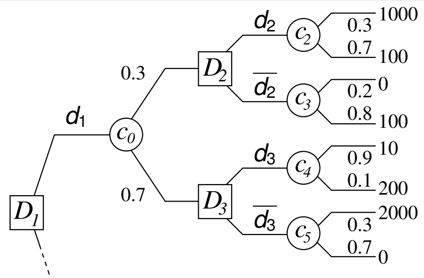
$E(S_1) = 0.3 \times E\left(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle\right) + 0.7 \times E\left(\langle\langle D_3 = d_3\rangle\rangle\right)$

Stratégie $S_2 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = \overline{d_3}\rangle\rangle$

$E(S_2) = 0.3 \times E\left(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle\right) + 0.7 \times E(\langle\langle D_3 = \overline{d_3}\rangle\rangle)$

$\Longrightarrow$ calculer $E\left(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle\right)$ une seule fois, stocker le résultat en D_2 et le réutiliser pour toute stratégie contenant $D_2 = d_2$

Calculs dans un arbre de décision (3/5)



Problème : Doit-on stocker en D_2 les 2 espérances $E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle)$ et $E(\langle\langle D_2 = \overline{d_2}\rangle\rangle)$?

Soit $S_1 = \langle\langle D_1 = d_1, \ldots, D_2 = d_2\rangle\rangle$ et $S_2 = \langle\langle D_1 = d_1, \ldots, D_2 = \overline{d_2}\rangle\rangle$ deux stratégies ne différant que par la décision D_2

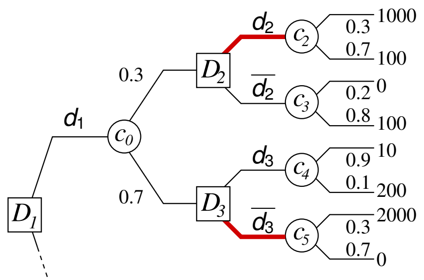
Alors $E(S_1) - E(S_2) = E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle) - E(\langle\langle D_2 = \overline{d_2}\rangle\rangle)$

$\Longrightarrow$ Si $E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle) \geq E(\langle\langle D_2 = \overline{d_2}\rangle\rangle)$ alors $E(S_1) \geq E(S_2)$

$\Longrightarrow$ ne conserver que $E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle)$ dans le nœud D_2

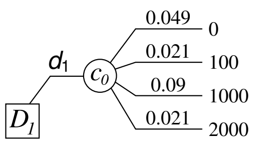
Calculs dans un arbre de décision (4/5)

$\Longrightarrow$ sur les nœuds de décision «terminaux», ne conserver que les meilleures décisions :



$\Longrightarrow$ Si on choisit $D_1 = d_1$, la sous-stratégie optimale est forcément : $D_2 = d_2, D_3 = d_3$ qui correspond à la loterie :

$$\langle 0,\ 0.49;\ \ 100,\ 0.21;\ \ 1000,\ 0.09;\ \ 2000,\ 0.21\rangle$$

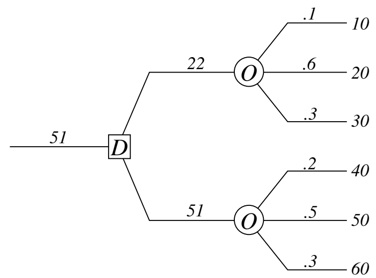


puis réitérer le process...

Calculs dans un arbre de décision (5/5)

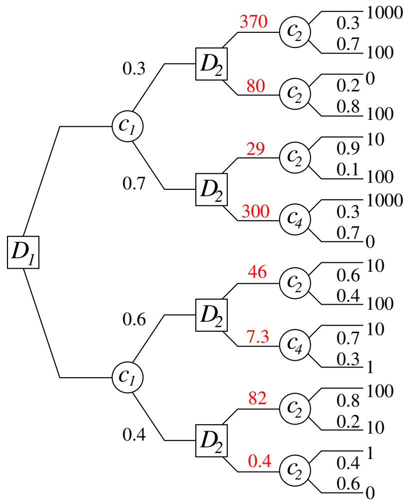
Règle de calcul dans l'arbre de décision

1. si le nœud est un nœud de chance, on calcule une espérance
2. si le nœud est un nœud de décision, on conserve le max



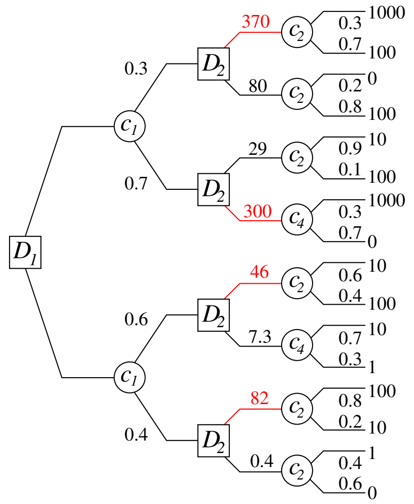
Méthode de calcul = inférence arrière

Exemple d'inférence dans un arbre de décision (1/4)



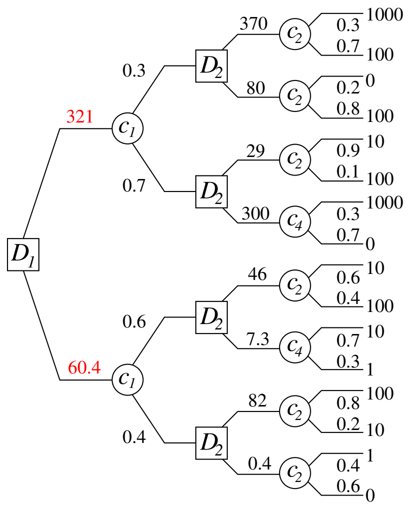
calcul : $EU(C_2) = \sum_{C_2} P(C_2|D_1, C_1, D_2)u(D_1, C_1, D_2, c_2)$

Exemple d'inférence dans un arbre de décision (2/4)



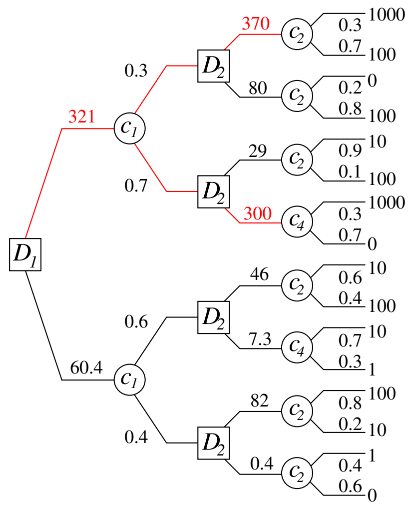
calcul : $EU(D_2) = \max_{D_2} EU(C_2)$

Exemple d'inférence dans un arbre de décision (3/4)



calcul : $EU(C_1) = \sum_{C_1} P(C_1|D_1)EU(D_2)$

Exemple d'inférence dans un arbre de décision (4/4)

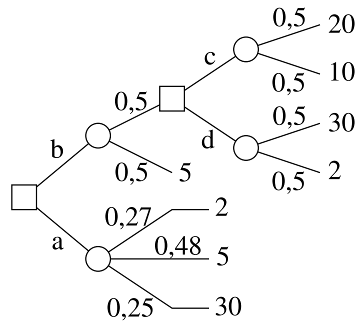


calcul : $EU(D_1) = \max_{D_1} EU(C_1)$

4 Décisions séquentielles avec RDU

RDU : Problème de cohérence dynamique

Supposons que $\varphi(x) = e^{-\sqrt{-ln(x)}}$



$$\begin{aligned}
RDU(a) &= 2 + (5-2)\varphi(0,73) + (30-5)\varphi(0,25) = 11,41\\
RDU(bc) &= 5 + (10-5)\varphi(0,5) + (20-10)\varphi(0,25) = 10,26\\
\color{red}{RDU(bd)} &= 2 + (5-2)\varphi(0,75) + (30-5)\varphi(0,25) = \color{red}{11{,}46}
\end{aligned}$$

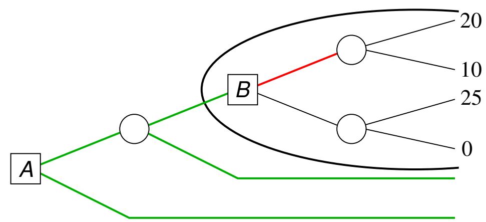
$$\begin{aligned}
\color{red}{RDU(c)} &= 10 + (20-10)\varphi(0,5) = \color{red}{14{,}35}\\
RDU(d) &= 2 + (30-2)\varphi(0,5) = 14,18
\end{aligned}$$

Problème : peut-on échapper au problème de cohérence dynamique ?

Conséquentialisme

Définition

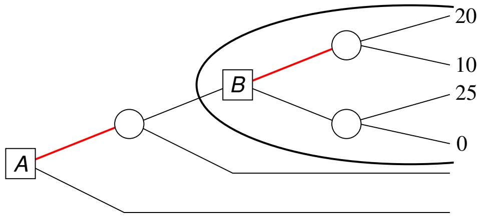
Les préférences dans le sous-arbre de racine B ne dépendent pas du reste de l'arbre



cohérence dynamique

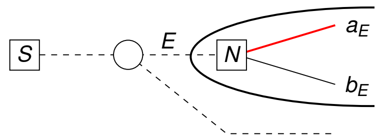
Définition

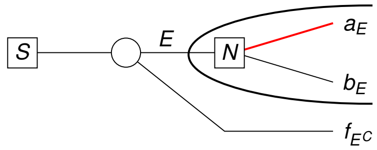
La stratégie préférée en A génère une sous-stratégie de racine B qui est la stratégie préférée en B

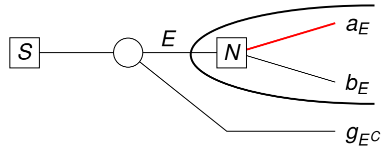


Conséquentialisme + cohérence dynamique

conséquentialisme : pref ne dépend pas du sous-arbre en pointillé







cohérence dynamique : en S, la stratégie rouge en N est préférée dans les deux arbres

Donc $(a_E, f_{E^C}) \succ (b_E, f_{E^C}) \Longleftrightarrow (a_E, g_{E^C}) \succ (b_E, g_{E^C})$

conséquentialisme + cohérence dynamique
$\Longrightarrow$ sure thing principle

Quelques références

Références

1. A. P. Dempster (1967)
   "Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping", Annals of Mathematical Statistics, Vol 38, pp. 325-339
2. G. Shafer (1976)
   "Mathematical Theory of Evidence", Princeton University Press
3. J.-Y. Jaffray (1989)
   "Linear Utility Theory For Belief Functions", Operations Research Letters, Vol 8, pp. 107–112
4. L. Hurwicz (1951)
   "Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance", Cowles Commission discussion paper, Statistics, N˚ 370