MODE — cours 2 : modèles non linéaires

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours 2

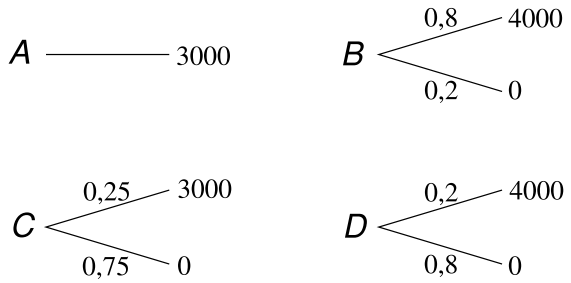
1 Limites descriptives de EU

Limites descriptives de EU (1/4)

- Les axiomes d'EU ne sont pas si ≪naturels≫
- Double interprétation de la fonction d'utilité u :
  - attitude vis à vis du risque (concavité = aversion)
  - préférences dans le certain
    (concavité = utilité marginale décroissante de la richesse)
  - impossible de combiner les 2
    (goût pour le risque + utilités marginales décroissantes)
- commensurabilité des préférences et des incertitudes
- manque de flexibilité pour rendre compte de divers types d'aversion au risque
- dans vNM : les probabilités ≪objectives≫ ne sont pas toujours celles perçues par l'agent

Limites descriptives de EU (2/4)

Kahneman & Tversky :



$A \succ B$

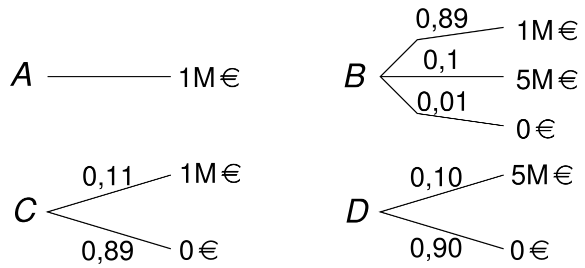
$D \succ C$

$C = 0,25 \times A + 0,75 \times 0$ $\qquad$ $D = 0,25 \times B + 0,75 \times 0$

violation de l'axiome d'indépendance / effet de certitude

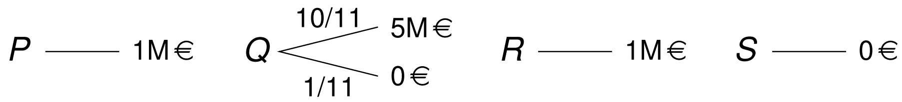
Limites descriptives de EU (3/4)

Le paradoxe d'Allais (53) :



$A \succ B$

$D \succ C$



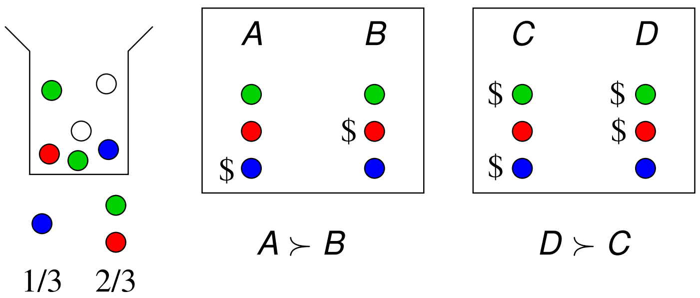
$A = 0,11 \times P + 0,89 \times R$ $\qquad$ $C = 0,11 \times P + 0,89 \times S$

$B = 0,11 \times Q + 0,89 \times R$ $\qquad$ $D = 0,11 \times Q + 0,89 \times S$

violation de l'axiome d'indépendance

Limites descriptives de EU (3/3)

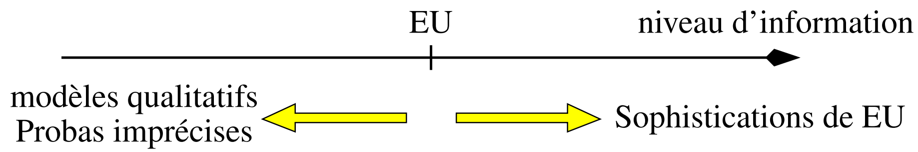
L'urne d'Ellsberg (1961) :



$A \succ B$ $\qquad$ $D \succ C$

$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle

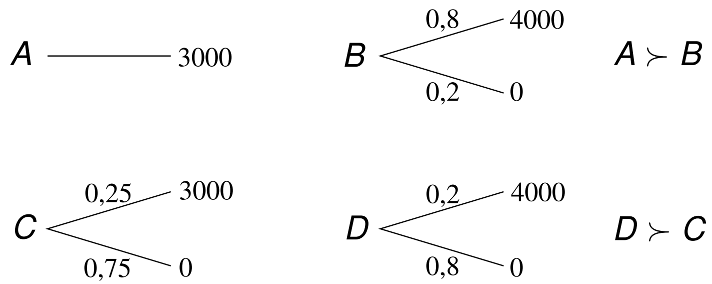
Deux directions...



2 Modèles non linéaires :

La Prospect Theory

Limites descriptives de EU : Kahneman & Tversky



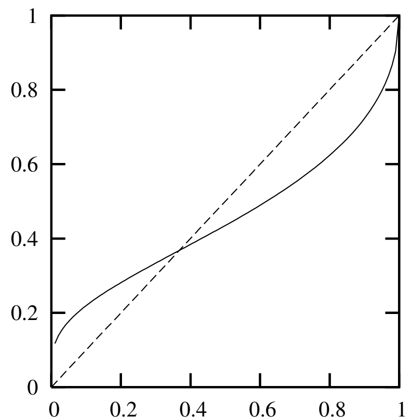
$C = 0,25 \times A + 0,75 \times 0$ $\quad$ $D = 0,25 \times B + 0,75 \times 0$

$\Longrightarrow$ violation de l'axiome d'indépendance

Déformation des probabilités

Kahneman & Tversky (79)

$\mu(A) = e^{-\sqrt{-\ln(p(A))}}$



Transformation de probabilités

Transformation : idée

Utiliser une capacité non décomposable obtenue à partir d'une déformation des probabilités :

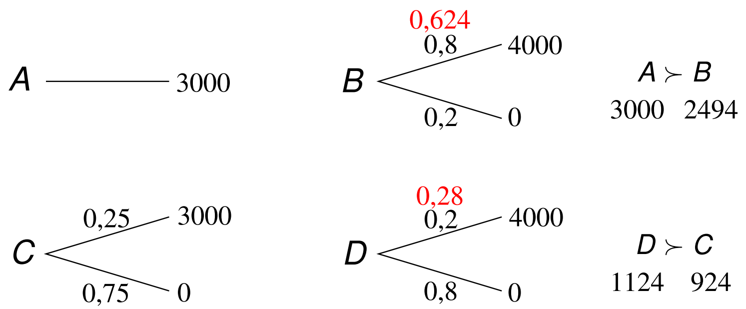
$$\mu(A) = \varphi(P(A)), \text{ où } P(A) = \text{ proba de } A.$$

Prospect Theory – Kahneman & Tversky (79)

- $L = \langle x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n \rangle$
- idée : remplacer $EU(L)$ par $PT(L)$:

$$PT(L) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(p(x_i))u(x_i)$$

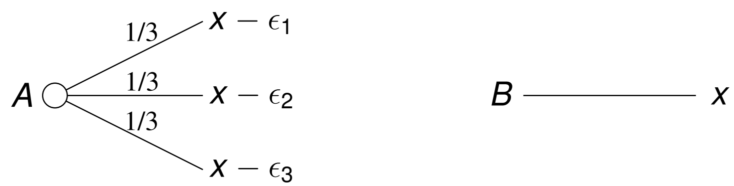
Kahneman & Tversky et le paradoxe d'Allais



Représentable par la Prospect Theory

Problème des déformations de probabilité

Supposons que $\varphi(1/3) > 1/3$



$A \succ B$ ou $B \succ A$?

$\Longrightarrow$ besoin d'un modèle plus sophistiqué : RDU

3 Modèles non linéaires :

Rank Dependent Utility

De EU à RDU

Loterie $L = \langle x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3 \rangle$

Critère EU :

Loterie $L \Longrightarrow U(L) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + p_3 u(x_3)$

supposons que $u(x_2) < u(x_1) < u(x_3)$:

$U(L) = (p_1 + p_2 + p_3)u(x_2) + (p_1 + p_3)[u(x_1) - u(x_2)] + p_3[u(x_3) - u(x_1)]$

Critère RDU :

$U(L) = \varphi(p_1 + p_2 + p_3)u(x_2) + \varphi(p_1 + p_3)[u(x_1) - u(x_2)] + \varphi(p_3)[u(x_3) - u(x_1)]$

$\varphi =$ transformation (de perception) de probabilité

Rank Dependent Utility (RDU)

Définition

- μ : capacité non décomposable obtenue à partir d'une déformation des probabilités :

$$\mu(A) = \varphi(P(A)), \text{ où } P(A) = \text{proba de } A.$$

- x_i triés par utilités croissantes :

$$u(x_1) \leq u(x_2) \leq \cdots \leq u(x_n)$$

- Rank dependent utility :

$$RDU(x) = u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)(u(x_i) - u(x_{i-1}))$$

Interprétation de RDU

interprétation de RDU

$$RDU(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)[u(x_i) - u(x_{i-1})]$$

- Le décideur évalue l'utilité minimale $u(x_1)$
- puis pondération des accroissements d'utilité $u(x_i) - u(x_{i-1})$ par une transformation de la proba d'avoir au moins x_i
- $\varphi(p) \leq p \Longrightarrow$ sous-estimation des accroissements
  $\Longrightarrow$ pessimisme dans le risque

Exemple de calcul de RDU

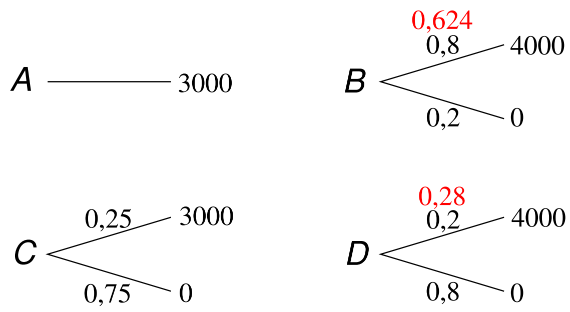
- utilité de von Neumann-Morgenstern $u(x) = x/2$
- transformation de proba $\varphi(x) = x^2$
- loterie $L = \langle 3, 0.2;\ 10, 0.4;\ 5, 0.1;\ 9, 0.3\rangle$

---

1. trier les conséquences de L par ordre de préférence
   $\Longrightarrow L = \langle 3, 0.2;\ 5, 0.1;\ 9, 0.3;\ 10, 0.4\rangle$
2. appliquer la formule de RDU :
   $RDU(L) = \varphi(1)\frac{3}{2} + \varphi(0.8)\left[\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right] + \varphi(0.7)\left[\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right] + \varphi(0.4)\left[\frac{10}{2} - \frac{9}{2}\right]$

RDU et le paradoxe d'Allais

RDU avec $\mu(A) = e^{-\sqrt{-\ln(p(A))}}$



$A \succ B$
3000 2494

$D \succ C$
1124 924

Représentable par RDU

Définition précise de RDU

Définition

préférences sur $(\mathcal{L}, \succsim)$ représentables par RDU :

- $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, croissante, cardinale, qui représente $\succsim_{\mathcal{X}}$
- $\varphi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, croissante
- variables aléatoires X et Y, $X \succsim Y \Leftrightarrow U(X) \geq U(Y)$ où :

$$U(X) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(P(u(X) > t))dt.$$

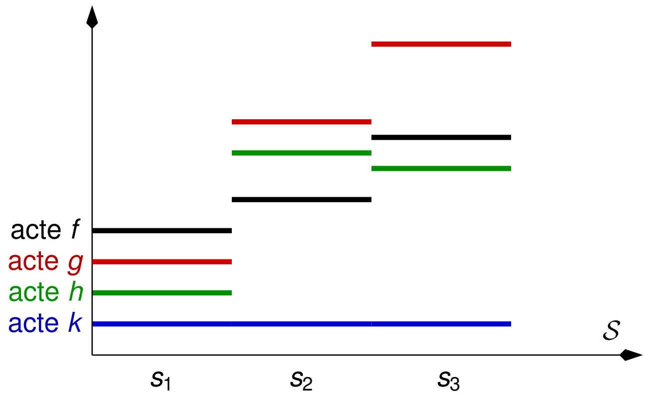
Axiomatique de RDU : la comonotonie (1/2)

Actes comonotones

- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature
- acte v = fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
- 2 actes f et g sont comonotones s'il n'existe pas d'événements $s, s' \in \mathcal{S}$ tels que :

$$f(s) \succ_{\mathcal{X}} f(s') \text{ et } g(s) \prec_{\mathcal{X}} g(s')$$

Axiomatique de RDU : la comonotonie (2/2)



- Actes comonotones : (f, g), (g, k), (k, h)
- Actes non comonotones : (g, h)
- Comonotonie non transitive : (g, k) et (k, h) mais pas (g, h)

Caractérisation axiomatique de RDU (1/2)

Principe : Remplacer le ≪Sure Thing Principle≫ par le ≪Comonotonic Sure Thing Principle≫

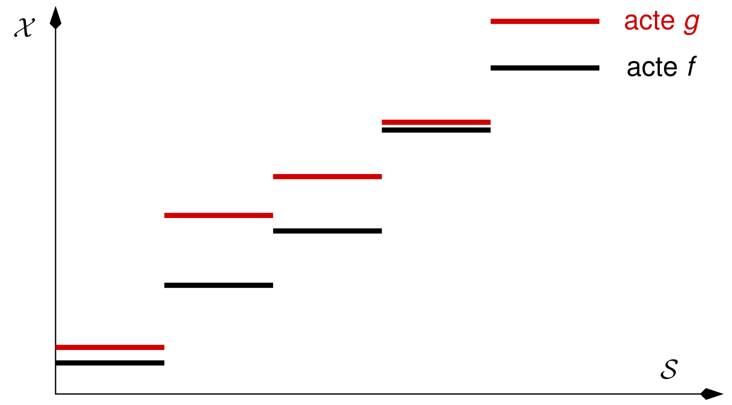
Principe de la chose sûre comonotone

- $\{A_1, \ldots, A_n\}$ partition de $\mathcal{S}$
- acte $X : A_i \mapsto x_i$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$
- acte $Y : A_i \mapsto y_i$ avec $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$
- il existe i_0 tel que $x_{i_0} = y_{i_0}$
- 2 actes $X' : A_i \mapsto x'_i$ et $Y' : A_i \mapsto y'_i$ tels que :

$$\begin{cases} x'_{i_0} = y'_{i_0}; \quad x'_i = x_i \text{ et } y'_i = y_i \text{ pour tout } i \neq i_0 \\ x'_1 \leq \cdots \leq x'_n \text{ et } y'_1 \leq \cdots \leq y'_n \end{cases}$$

- Alors : $X \succsim Y \Longrightarrow X' \succsim Y'$

Caractérisation axiomatique de RDU (2/2)



⚠ Remplacer uniquement le «Sure Thing Principle» ne suffit pas $\Longrightarrow$ il faut ajouter d'autres axiomes

Aversion au risque : rappels (1/2)

Aversion faible pour le risque – Arrow(65), Pratt(64)

Un agent a de l'aversion faible pour le risque si, pour toute loterie L, il préfère l'acte certain d'espérance $E(L)$ à l'acte L :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ \langle E(L), 1\rangle \succsim L.$$

L'agent a du goût faible pour le risque si : $\forall L \in \mathcal{L},\ L \succsim \langle E(L), 1\rangle$.

L'agent est neutre vis à vis du risque si : $\forall L \in \mathcal{L},\ L \sim \langle E(L), 1\rangle$.

Aversion au risque : rappels (2/2)

Aversion forte pour le risque – Rothschild & Stiglitz (1970)

- Un agent a de l'aversion forte pour le risque si : pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \text{MPS}(X)$, $X \succsim Y$
- Un agent a un goût fort pour le risque si : pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \text{MPS}(X)$, $Y \succsim X$
- Un agent est neutre vis-à-vis du risque si : pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \text{MPS}(X)$, $Y \sim X$

$\forall X,\ X = \text{MPS}(E(X)) \Longrightarrow$ aversion forte $\Longrightarrow$ aversion faible

Rappel : l'attitude face au risque avec EU

Proposition de Rothschild & Stiglitz (1970-71)

- agent maximisateur d'espérance d'utilité
- les 3 assertions suivantes sont équivalentes :
  1. l'agent a de l'aversion faible pour le risque
  2. l'agent a de l'aversion forte pour le risque
  3. la fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern de l'agent est concave

Problème : Double interprétation de la fonction d'utilité u :

- attitude vis à vis du risque (concavité = aversion)
- préférences dans le certain (concavité = utilité marginale décroissante de la richesse)

Pessimisme et RDU

$$RDU(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)[u(x_i) - u(x_{i-1})]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{transformation } \varphi \Longrightarrow \text{préférences sur les probas} \\ \text{fonction d'utilité } u \Longrightarrow \text{préférences sur les conséquences} \end{cases}$$

$\varphi(p) \leq p \Longrightarrow$ sous-estime les accroissements d'utilité par rapport à EU

Pessimisme avec RDU

Un agent tel que $\varphi(p) \leq p$ pour tout $p \in [0, 1]$ est dit *pessimiste dans le risque*

Aversion forte pour le risque avec RDU

Proposition de Chew, Karni, Safra (87)

- agent RDU
- les fonctions φ et u sont dérivables
- les 2 assertions suivantes sont équivalentes :
  1. l'agent a de l'aversion forte pour le risque
  2. la fonction d'utilité u est concave ET la fonction de perception des probas φ est convexe

Accroissements de risque

Rappel : accroissement de risque à moyenne constante (MPS)

- X et Y variables aléatoires
- $Y = \text{MPS}(X)$ si $Y = X + Z$, où Z est un bruit blanc

Accroissement monotone de risque à moyenne constante

- X et Y variables aléatoires
- Y accroissement monotone de risque à moyenne constante de X si :
  1. $Y = X + Z$, où Z est un bruit blanc
  2. X et Z sont comonotones

Aversion monotone pour le risque

Un agent a de l'aversion monotone pour le risque s'il n'aime pas l'accroissement monotone pour le risque.

Aversion monotone pour le risque avec RDU

Proposition – Chateauneuf, Cohen, Meilijson (05)

- l'agent a des préférences RDU
- les fonctions u et φ sont dérivables
- indice de pessimisme : $P_\varphi = \inf_{0<p<1}\left[\frac{1-\varphi(p)}{\varphi(p)} / \frac{1-p}{p}\right]$
- indice de non concavité : $G_u = \sup_{y \leq x} \frac{u'(x)}{u'(y)}$
- l'agent a de l'aversion monotone pour le risque si et seulement si $P_\varphi \geq G_u$

Remarques : $G_u \geq 1$; $P_\varphi \geq 1$ si et seulement si $\varphi(p) \leq p$

$\Longrightarrow$ aversion monotone pour le risque $\Longrightarrow \varphi(p) \leq p$

⚠ aversion monotone pour le risque $\not\Longrightarrow$ u concave

Aversion faible pour le risque avec RDU

Pas de caractérisation de l'aversion faible pour le risque

Il y a seulement des conditions suffisantes (e.g., Chateauneuf & Cohen (94))

la concavité de u n'est forcément pas nécessaire !

Conclusions sur l'aversion au risque avec RDU

- Aversion forte $\Longrightarrow$ aversion monotone $\Longrightarrow$ aversion faible
- En général, les implications inverses sont fausses

4 Modèles non linéaires :

Choquet Expected Utility

La notion de capacité

Définition d'une capacité

- fonction μ des sous-ensembles de $\mathcal{S}$ dans $[0, 1]$
- $\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathcal{S}) = 1$
- monotone : $\forall A \subset B \subseteq \mathcal{S}, \mu(A) \leq \mu(B)$

Choquet expected utility (1/2)

Définition de l'intégrale de Choquet

- $\mathcal{A}$: sous-ensembles de $\mathcal{S}$
- μ : capacité de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$
- X : fonction (mesurable) de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$
- intégrale de Choquet :

$$\int_{Ch} X d\mu = \int_{-\infty}^{0} [\mu(X > t) - 1] dt + \int_{0}^{\infty} \mu(X > t) dt$$

- μ = proba $P \Longrightarrow \int_{Ch} X dP$ = espérance de X
- X prend un nb fini de valeurs $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$:

$$\int_{Ch} X d\mu = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) \mu(X \geq x_i)$$

Choquet expected utility (2/2)

Choquet Expected Utility (CEU)

- $\mathcal{X}$: ensemble de conséquences
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature
- f : acte : application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{X}$
- u : application croissante de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}$
- $X = u \circ f$: fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$
- espérance d'utilité à la Choquet de l'acte f :

$$\begin{aligned} CEU(f) &= \int_{Ch} u(f)d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{0} [\mu(u(f) > t) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \mu(u(f) > t)dt \end{aligned}$$

Choquet et RDU

Choquet Expected Utility

- μ : capacité sur les sous-ensembles de $\mathcal{S}$
- espérance d'utilité à la Choquet de l'acte f :

$$CEU(f) = \int_{-\infty}^{0} [\mu(u(f) > t) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \mu(u(f) > t)dt$$

Rank Dependent Utility

- $\varphi : [0,1] \mapsto [0,1]$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, croissante
- X variable aléatoire

$$RDU(X) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(P(u(X) > t))dt$$

$\Longrightarrow \mu = \varphi \circ P$

Quelques références (1/2)

Références

1. M. Allais (1953)
   "Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque : Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Américaine", *Econometrica*, Vol 21, pp.503-546
2. D. Ellsberg (1961)
   "Risk, Ambiguity and the Savage Axioms", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 75, pp.643–669
3. D. Kahneman & A. Tversky (1972)
   "Subjective Probability : A Judgment of Representativeness", Cognitive Psychology, Vol 3, pp. 430-454
4. D. Kahneman & A. Tversky (1979)
   "Prospect Theory : an Analysis of Decision under Risk", *Econometrica*, Vol. 47, pp.263–291
5. J. Quiggin (1993)
   "Generalized Expected Utility Theory : The Rank-dependent Model", Springer

Quelques références (2/2)

Références

6. G. Choquet (1953)
   "Théorie des capacités", *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*, vol. V, pp.131–295
7. A. Chateauneuf (1994)
   "Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral", *Annals of Operations Research*, Vol. 52, pp.3–20
8. S. Chew & P.P. Wakker (1996)
   "The Comonotonic Sure Thing Principle", *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 12, pp.5–27
9. S. Chew, E. Karni & Z. Safra (1987)
   "Risk aversion in the Theory of Expected Utility with Rank Dependent Preferences", *Journal of Economic Theory*, Vol. 42, pp.370–381