MODE — cours 2 : modèles non linéaires

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours 2

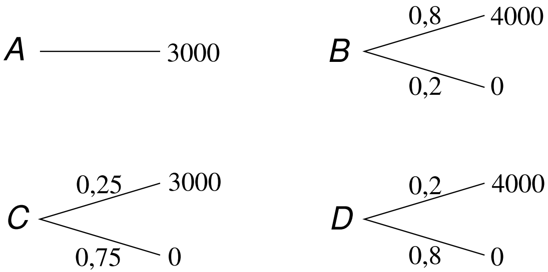
1. Limites descriptives de EU
2. Prospect Theory
3. Rank Dependent Utility
4. Choquet Expected Utility

1. Limites descriptives de EU

Limites descriptives de EU (1/4)

- Les axiomes d'EU ne sont pas si ≪naturels≫
- Double interprétation de la fonction d'utilité u :
  - attitude vis à vis du risque (concavité = aversion)
  - préférences dans le certain
    (concavité = utilité marginale décroissante de la richesse)
  - impossible de combiner les 2
    (goût pour le risque + utilités marginales décroissantes)
- commensurabilité des préférences et des incertitudes
- manque de flexibilité pour rendre compte de divers types d'aversion au risque
- dans vNM : les probabilités ≪objectives≫ ne sont pas toujours celles perçues par l'agent

Kahneman & Tversky :



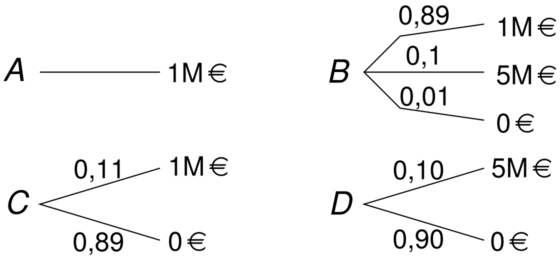
$A \succ B$

$D \succ C$

$$C = 0,25 \times A + 0,75 \times 0 \qquad D = 0,25 \times B + 0,75 \times 0$$

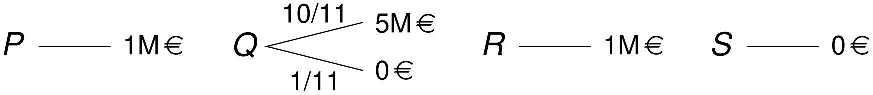
violation de l'axiome d'indépendance / effet de certitude

Le paradoxe d'Allais (53) :



$A \succ B$

$D \succ C$

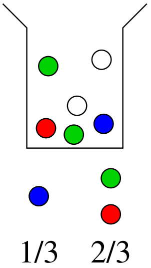


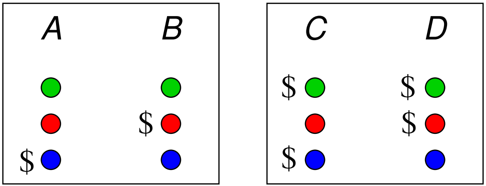
$A = 0,11 \times P + 0,89 \times R \qquad C = 0,11 \times P + 0,89 \times S$

$B = 0,11 \times Q + 0,89 \times R \qquad D = 0,11 \times Q + 0,89 \times S$

violation de l'axiome d'indépendance

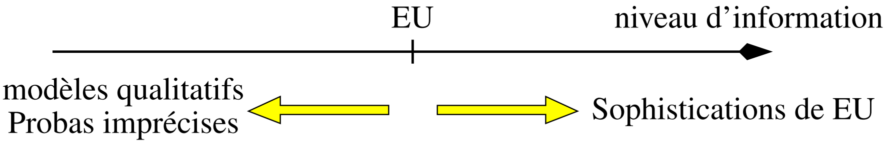
L'urne d'Ellsberg (1961) :





$A \succ B$ $\qquad$ $D \succ C$

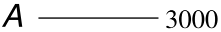
$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle

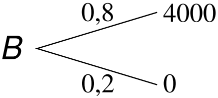

EU
niveau d'information
modèles qualitatifs
Probas imprécises
Sophistications de EU

2 Modèles non linéaires :

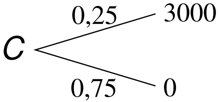
La Prospect Theory

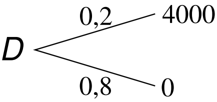
Limites descriptives de EU : Kahneman & Tversky





$A \succ B$





$D \succ C$

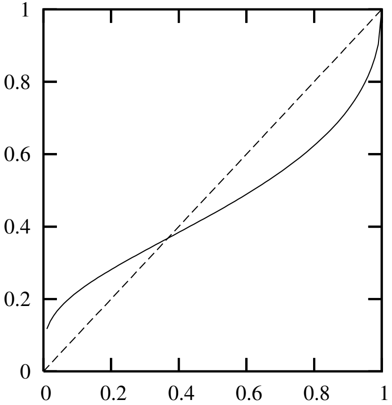
$C = 0,25 \times A + 0,75 \times 0$ $\qquad$ $D = 0,25 \times B + 0,75 \times 0$

$\Longrightarrow$ violation de l'axiome d'indépendance

Déformation des probabilités

Kahneman & Tversky (79)

$$\mu(A) = e^{-\sqrt{-\ln(p(A))}}$$



Transformation de probabilités

Transformation : idée

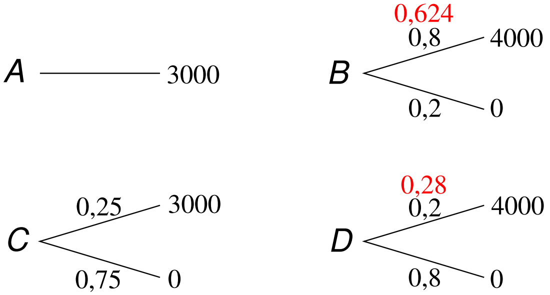
Utiliser une capacité non décomposable obtenue à partir d'une déformation des probabilités :

$$\mu(A) = \varphi(P(A)), \text{ où } P(A) = \text{ proba de } A.$$

Prospect Theory – Kahneman & Tversky (79)

- $L = \langle x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n \rangle$
- idée : remplacer $EU(L)$ par $PT(L)$:

$$PT(L) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(p(x_i))u(x_i)$$



$A \succ B$

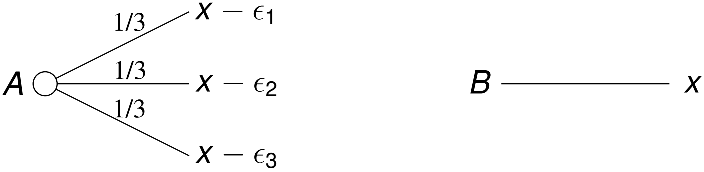
3000 2494

$D \succ C$

1124 924

Représentable par la Prospect Theory

Supposons que $\varphi(1/3) > 1/3$



$A \succ B$ ou $B \succ A$?

$\Longrightarrow$ besoin d'un modèle plus sophistiqué : RDU

3. Modèles non linéaires :

Rank Dependent Utility

De EU à RDU

Loterie $L = \langle x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3 \rangle$

Critère EU :

Loterie $L \Longrightarrow U(L) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + p_3 u(x_3)$

supposons que $u(x_2) < u(x_1) < u(x_3)$:

$$U(L) = (p_1 + p_2 + p_3)u(x_2) + (p_1 + p_3)[u(x_1) - u(x_2)] + p_3[u(x_3) - u(x_1)]$$

Critère RDU :

$$U(L) = \varphi(p_1 + p_2 + p_3)u(x_2) + \varphi(p_1 + p_3)[u(x_1) - u(x_2)] + \varphi(p_3)[u(x_3) - u(x_1)]$$

$\varphi =$ transformation (de perception) de probabilité

Rank Dependent Utility (RDU)

Définition

- μ : capacité non décomposable obtenue à partir d'une déformation des probabilités :

$$\mu(A) = \varphi(P(A)),\ \text{où } P(A) = \text{proba de } A.$$

- x_i triés par utilités croissantes :

$$u(x_1) \leq u(x_2) \leq \cdots \leq u(x_n)$$

- Rank dependent utility :

$$RDU(x) = u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)(u(x_i) - u(x_{i-1}))$$

Interprétation de RDU

interprétation de RDU

$$RDU(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right) [u(x_i) - u(x_{i-1})]$$

- Le décideur évalue l'utilité minimale $u(x_1)$
- puis pondération des accroissements d'utilité $u(x_i) - u(x_{i-1})$ par une transformation de la proba d'avoir au moins x_i
- $\varphi(p) \leq p \Longrightarrow$ sous-estimation des accroissements
  $\Longrightarrow$ pessimisme dans le risque

Exemple de calcul de RDU

- utilité de von Neumann-Morgenstern $u(x) = x/2$
- transformation de proba $\varphi(x) = x^2$
- loterie $L = \langle 3, 0.2;\ 10, 0.4;\ 5, 0.1;\ 9, 0.3 \rangle$

---

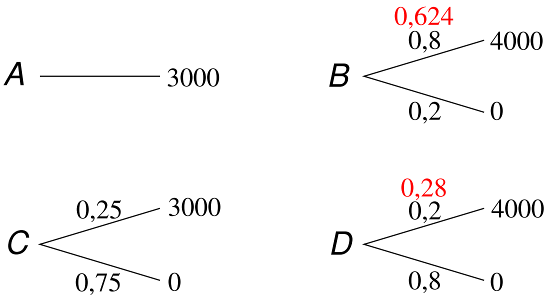
1. trier les conséquences de L par ordre de préférence

   $\Longrightarrow L = \langle 3, 0.2;\ 5, 0.1;\ 9, 0.3;\ 10, 0.4 \rangle$

2. appliquer la formule de RDU :

   $RDU(L) = \varphi(1)\frac{3}{2} + \varphi(0.8)\left[\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right] + \varphi(0.7)\left[\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right] + \varphi(0.4)\left[\frac{10}{2} - \frac{9}{2}\right]$

$$\text{RDU avec } \mu(A) = e^{-\sqrt{-\ln(p(A))}}$$



$A \succ B$

3000 2494

$D \succ C$

1124 924

Représentable par RDU

Définition précise de RDU

Définition

préférences sur $(\mathcal{L}, \succsim)$ représentables par RDU :

- $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, croissante, cardinale, qui représente $\succsim_{\mathcal{X}}$
- $\varphi : [0,1] \mapsto [0,1]$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, croissante
- variables aléatoires X et Y, $X \succsim Y \Leftrightarrow U(X) \geq U(Y)$ où :

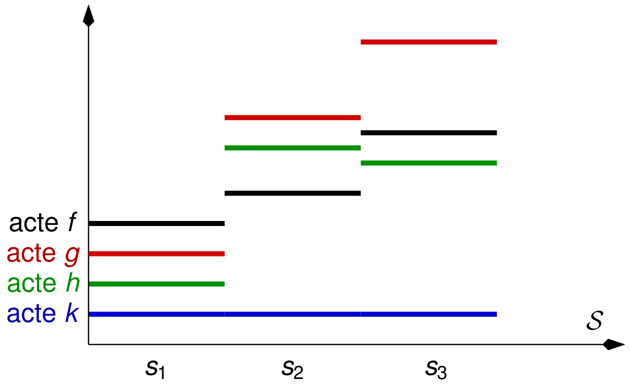
$$U(X) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1] dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(P(u(X) > t)) dt.$$

Axiomatique de RDU : la comonotonie (1/2)

Actes comonotones

- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature
- acte v = fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
- 2 actes f et g sont comonotones s'il n'existe pas d'événements $s, s' \in \mathcal{S}$ tels que :

$$f(s) \succ_{\mathcal{X}} f(s') \text{ et } g(s) \prec_{\mathcal{X}} g(s')$$



- Actes comonotones : (f, g), (g, k), (k, h)
- Actes non comonotones : (g, h)
- Comonotonie non transitive : (g, k) et (k, h) mais pas (g, h)

Caractérisation axiomatique de RDU (1/2)

Principe : Remplacer le «Sure Thing Principle» par le «Comonotonic Sure Thing Principle»

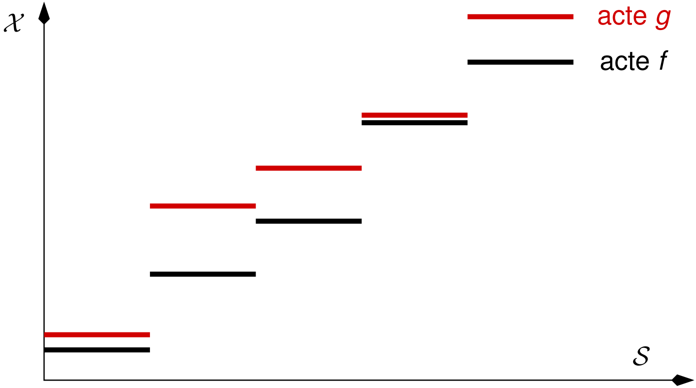
Principe de la chose sûre comonotone

- $\{A_1, \ldots, A_n\}$ partition de $\mathcal{S}$
- acte X : $A_i \mapsto x_i$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$
- acte Y : $A_i \mapsto y_i$ avec $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$
- il existe i_0 tel que $x_{i_0} = y_{i_0}$
- 2 actes X' : $A_i \mapsto x'_i$ et Y' : $A_i \mapsto y'_i$ tels que :

$$\begin{cases} x'_{i_0} = y'_{i_0}; \quad x'_i = x_i \text{ et } y'_i = y_i \text{ pour tout } i \neq i_0 \\ x'_1 \leq \cdots \leq x'_n \text{ et } y'_1 \leq \cdots \leq y'_n \end{cases}$$

- Alors : $X \succsim Y \Longrightarrow X' \succsim Y'$

Caractérisation axiomatique de RDU (2/2)



⚠ Remplacer uniquement le «Sure Thing Principle» ne suffit pas $\Longrightarrow$ il faut ajouter d'autres axiomes

Aversion faible pour le risque – Arrow(65), Pratt(64)

Un agent a de l'aversion faible pour le risque si, pour toute loterie L, il préfère l'acte certain d'espérance $E(L)$ à l'acte L :

$$\forall L \in \mathcal{L}, \langle E(L), 1 \rangle \succsim L.$$

L'agent a du goût faible pour le risque si : $\forall L \in \mathcal{L}$, $L \succsim \langle E(L), 1 \rangle$.

L'agent est neutre vis à vis du risque si : $\forall L \in \mathcal{L}$, $L \sim \langle E(L), 1 \rangle$.

Aversion au risque : rappels (2/2)

Aversion forte pour le risque – Rothschild & Stiglitz (1970)

- Un agent a de l'aversion forte pour le risque si :
  pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \mathrm{MPS}(X)$, $X \succsim Y$
- Un agent a un goût fort pour le risque si :
  pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \mathrm{MPS}(X)$, $Y \succsim X$
- Un agent est neutre vis-à-vis du risque si :
  pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \mathrm{MPS}(X)$, $Y \sim X$

$\forall X,\ X = \mathrm{MPS}(E(X)) \Longrightarrow$ aversion forte $\Longrightarrow$ aversion faible

Rappel : l'attitude face au risque avec EU

Proposition de Rothschild & Stiglitz (1970-71)

- agent maximisateur d'espérance d'utilité
- les 3 assertions suivantes sont équivalentes :
  1. l'agent a de l'aversion faible pour le risque
  2. l'agent a de l'aversion forte pour le risque
  3. la fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern de l'agent est concave

Problème : Double interprétation de la fonction d'utilité u :

- attitude vis à vis du risque (concavité = aversion)
- préférences dans le certain (concavité = utilité marginale décroissante de la richesse)

$$RDU(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)[u(x_i) - u(x_{i-1})]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{transformation } \varphi \Longrightarrow \text{préférences sur les probas} \\ \text{fonction d'utilité } u \Longrightarrow \text{préférences sur les conséquences} \end{cases}$$

$\varphi(p) \leq p \Longrightarrow$ sous-estime les accroissements d'utilité par rapport à EU

Pessimisme avec RDU

Un agent tel que $\varphi(p) \leq p$ pour tout $p \in [0, 1]$ est dit *pessimiste dans le risque*

Aversion forte pour le risque avec RDU

Proposition de Chew, Karni, Safra (87)

- agent RDU
- les fonctions φ et u sont dérivables
- les 2 assertions suivantes sont équivalentes :
  1. l'agent a de l'aversion forte pour le risque
  2. la fonction d'utilité u est concave ET la fonction de perception des probas φ est convexe

Accroissements de risque

Rappel : accroissement de risque à moyenne constante (MPS)

- X et Y variables aléatoires
- $Y = \mathrm{MPS}(X)$ si $Y = X + Z$, où Z est un bruit blanc

Accroissement monotone de risque à moyenne constante

- X et Y variables aléatoires
- Y accroissement monotone de risque à moyenne constante de X si :
  1. $Y = X + Z$, où Z est un bruit blanc
  2. X et Z sont comonotones

Aversion monotone pour le risque

Un agent a de l'aversion monotone pour le risque s'il n'aime pas l'accroissement monotone pour le risque.

Aversion monotone pour le risque avec RDU

Proposition – Chateauneuf, Cohen, Meilijson (05)

- l'agent a des préférences RDU
- les fonctions u et φ sont dérivables
- indice de pessimisme : $P_\varphi = \inf_{0<p<1} \left[\frac{1-\varphi(p)}{\varphi(p)} \Big/ \frac{1-p}{p} \right]$
- indice de non concavité : $G_u = \sup_{y \leq x} \frac{u'(x)}{u'(y)}$
- l'agent a de l'aversion monotone pour le risque si et seulement si $P_\varphi \geq G_u$

Remarques : $G_u \geq 1$; $P_\varphi \geq 1$ si et seulement si $\varphi(p) \leq p$

$\Longrightarrow$ aversion monotone pour le risque $\Longrightarrow \varphi(p) \leq p$

⚠ aversion monotone pour le risque $\not\Longrightarrow$ u concave

Aversion faible pour le risque avec RDU

Pas de caractérisation de l'aversion faible pour le risque

Il y a seulement des conditions suffisantes (e.g., Chateauneuf & Cohen (94))

⚠ la concavité de u n'est forcément pas nécessaire !

Conclusions sur l'aversion au risque avec RDU

- Aversion forte $\Longrightarrow$ aversion monotone $\Longrightarrow$ aversion faible
- En général, les implications inverses sont fausses

4 Modèles non linéaires :

Choquet Expected Utility

La notion de capacité

Définition d'une capacité

- fonction μ des sous-ensembles de $\mathcal{S}$ dans $[0, 1]$
- $\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathcal{S}) = 1$
- monotone : $\forall A \subset B \subseteq \mathcal{S}$, $\mu(A) \leq \mu(B)$

Choquet expected utility (1/2)

Définition de l'intégrale de Choquet

- $\mathcal{A}$: sous-ensembles de $\mathcal{S}$
- μ : capacité de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$
- X : fonction (mesurable) de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$
- intégrale de Choquet :

$$\int_{Ch} X d\mu = \int_{-\infty}^{0} [\mu(X > t) - 1] dt + \int_{0}^{\infty} \mu(X > t) dt$$

- μ = proba $P \Longrightarrow \int_{Ch} X dP$ = espérance de X

- X prend un nb fini de valeurs $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$:

$$\int_{Ch} X d\mu = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) \mu(X \geq x_i)$$

Choquet expected utility (2/2)

Choquet Expected Utility (CEU)

- $\mathcal{X}$: ensemble de conséquences
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature
- f : acte : application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{X}$
- u : application croissante de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}$
- $X = u \circ f$: fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$
- espérance d'utilité à la Choquet de l'acte f :

$$\begin{aligned} CEU(f) &= \int_{Ch} u(f) d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{0} [\mu(u(f) > t) - 1] dt + \int_{0}^{\infty} \mu(u(f) > t) dt \end{aligned}$$

Choquet et RDU

Choquet Expected Utility

- μ : capacité sur les sous-ensembles de $\mathcal{S}$
- espérance d'utilité à la Choquet de l'acte f :

$$CEU(f) = \int_{-\infty}^{0} [\mu(u(f) > t) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \mu(u(f) > t)dt$$

Rank Dependent Utility

- $\varphi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, croissante
- X variable aléatoire

$$RDU(X) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(P(u(X) > t))dt$$

$$\Longrightarrow \mu = \varphi \circ P$$

Quelques références (1/2)

Références

1. M. Allais (1953)
   "Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque : Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Américaine", *Econometrica*, Vol 21, pp.503-546
2. D. Ellsberg (1961)
   "Risk, Ambiguity and the Savage Axioms", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 75, pp.643–669
3. D. Kahneman & A. Tversky (1972)
   "Subjective Probability : A Judgment of Representativeness", Cognitive Psychology, Vol 3, pp. 430-454
4. D. Kahneman & A. Tversky (1979)
   "Prospect Theory : an Analysis of Decision under Risk", *Econometrica*, Vol. 47, pp.263–291
5. J. Quiggin (1993)
   "Generalized Expected Utility Theory : The Rank-dependent Model", Springer

Quelques références (2/2)

Références

6. G. Choquet (1953)
   "Théorie des capacités",
   Annales de l'Institut Fourier (Grenoble), vol. V, pp.131–295
7. A. Chateauneuf (1994)
   "Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral", *Annals of Operations Research*, Vol. 52, pp.3–20
8. S. Chew & P.P. Wakker (1996)
   "The Comonotonic Sure Thing Principle", *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 12, pp.5–27
9. S. Chew, E. Karni & Z. Safra (1987)
   "Risk aversion in the Theory of Expected Utility with Rank Dependent Preferences", *Journal of Economic Theory*, Vol. 42, pp.370–381