MODE — cours 1 : décision dans le risque et l'incertain

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours 1

1. Les modèles mathématiques décisionnels
2. La décision dans le risque
3. La décision dans l'incertain
4. L'attitude vis à vis du risque

1 Modèles mathématiques décisionnels

Décision sans incertitude

Diverses décisions $\Rightarrow$ préférences sur les décisions : $d \succsim_{\mathcal{D}} d'$

Exemple

deux enveloppes : la 1$^{\text{ère}}$ contient 100 €, la 2$^{\text{ème}}$ 200 €

- d_1 = «prendre la première enveloppe»
- d_2 = «prendre la deuxième enveloppe»

$\Longrightarrow$ décideur : $d_2 \succsim_{\mathcal{D}} d_1$

Pourquoi ? $\Longrightarrow$ conséquence(d_2) préférée à conséquence(d_1)

Préférences sur les conséquences des décisions

$$d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow x(d_1) \succsim_{\mathcal{X}} x(d_2).$$

Décision avec incertitudes

En pratique : les conséquences sont incertaines

Exemple

enveloppe 2 choisie parmi une pile de 100 enveloppes dont 3 contiennent 1000 € et 97 contiennent 1 €

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{enveloppe 1 = 100 €} \\ \text{enveloppe 2 = 3 chances sur 100 d'avoir 1000 € et} \\ \qquad\qquad\quad \text{97 chances sur 100 d'avoir 1 €} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ décideur : $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2$

Pourquoi ? $\Longrightarrow$ trop de risque d'avoir 1 € avec d_2

$\Longrightarrow$ décision = conséquences + incertitudes

Terminologie (1/3)

Exemple

Préparation d'une omelette
Déjà 5 œufs cassés, 6ème œuf intact
3 alternatives :

- casser l'œuf dans l'assiette contenant les cinq œufs ;
- le casser dans une autre assiette pour l'inspecter ;
- ne pas vous servir de cet œuf.

Les conséquences

- conséquences : grande omelette, 5 œufs perdus, assiette inutilement salie, petite omelette
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences
- Alternatives jugées en fonction de leurs conséquences

Terminologie (2/3)

Exemple

Préparation d'une omelette
Déjà 5 œufs cassés, 6ème œuf intact
3 alternatives :

- casser l'œuf dans l'assiette contenant les cinq œufs ;
- le casser dans une autre assiette pour l'inspecter ;
- ne pas vous servir de cet œuf.

Les incertitudes

- incertitudes : œuf bon, œuf mauvais
- $\mathcal{S} =$ ensemble des états de la nature
  $=$ événements élémentaires
- $\mathcal{A} = \{S \subseteq \mathcal{S}\}$ = ensemble des événements

Terminologie (3/3)

Exemple

Préparation d'une omelette
Déjà 5 œufs cassés, 6ème œuf intact
3 alternatives :

- casser l'œuf dans l'assiette contenant les cinq œufs ;
- le casser dans une autre assiette pour l'inspecter ;
- ne pas vous servir de cet œuf.

Les actes

- acte v = fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
- acte $\equiv$ description d'une alternative / décision
- $\mathcal{V} = \{\text{actes}\}$

$$d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow v(d_1) \succsim_{\mathcal{V}} v(d_2)$$

Contextes de prise de décision

Décision dans le certain

- $\forall$ état de la nature, un acte $\Rightarrow$ toujours la même conséquence
- décision dans le certain : les préférences sur les actes correspondent aux préférences sur les conséquences

Décision dans le risque (von Neumann-Morgenstern 1944)

- alternative $\Rightarrow$ peut avoir plusieurs conséquences suivant la réalisation d'un événement ou d'un autre
- on suppose qu'il existe une distribution «objective» de probabilité connue sur $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$

Décision dans l'incertain

- alternative $\Rightarrow$ peut avoir plusieurs conséquences suivant la réalisation d'un événement ou d'un autre
- on ne suppose pas l'existence d'une distribution de probabilité sur $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$

Décision dans le certain

Fonction d'utilité (sur les décisions)

fonction $U : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow U(d_1) \geq U(d_2).$$

Fonction d'utilité (sur les conséquences)

fonction $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$x_1 \succsim_{\mathcal{X}} x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- *Avantages :*
  - problème décisionnel = problème d'optimisation $\Longrightarrow$ utilisation d'un solveur
  - préférences transitives $\Longrightarrow$ optimum facile à justifier
  - souvent, justifications axiomatiques simples
- *Inconvénients :*
  - nécessité d'avoir des préférences transitives
  - élicitation des préférences

Décision dans le risque ou l'incertain (à la Savage)

Le modèle d'espérance d'utilité

- Incertitudes = distribution de probabilité P sur $\mathcal{A}$
- $U : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$: Fonction d'utilité sur les décisions
- actes constants : $\forall a \in \mathcal{A} \mapsto$ le même $x \in \mathcal{X}$
- actes constants $\Longrightarrow f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ fonction d'utilité sur les conséquences

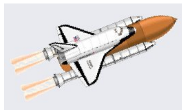
Modèle d'espérance d'utilité :

$$U(d) = \sum_{x(d)} P(x(d)) f(x(d)).$$

Exemple des enveloppes :

$\Longrightarrow U(\text{env } 1) = f(100\,€)$ et $U(\text{env } 2) = \frac{3}{100} f(1000\,€) + \frac{97}{100} f(1\,€)$

Quelques applications de ces modèles décisionnels

-  Arrimage de la navette spatiale
-  décision médicale
-  gestion de l'énergie ou de ressources critiques
-  domaine militaire
-  détermination de prix d'assurances

Quelques questions sur le modèle EU

- Les probas représentent-elles bien les incertitudes ?
- Raisonne-t-on avec des probas ?
- D'où sortent les probas ?
- Les préférences sur $\mathcal{X}$ doivent-elles être représentées par des fonctions d'utilité ?
- Est-ce que EU est un bon critère de décision ?

Réponse : ça dépend

Cours de MODE $\Longrightarrow$ voir dans quels cas EU est un modèle raisonnable

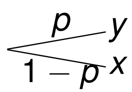
2 Décision dans le risque

Axiomatique de von Neumann-Morgenstern (1/5)

- $\mathcal{V}$: ensemble des actes = applications de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{X}$
- $\succsim_{\mathcal{D}}$: relation de préférence sur $\mathcal{V}$
- $\succ_{\mathcal{D}}$: relation de préférence stricte, $\sim_{\mathcal{D}}$: indifférence
- $\succsim_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \succsim_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}$ grâce aux actes constants

hypothèse du risque (incertain probabilisé) : $\exists P : 2^{\mathcal{S}} \mapsto \mathbb{R}$

- $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{S}}$, $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P)$: espace probabilisé
- $f \in \mathcal{V} \Longrightarrow P_f$ sur $(\mathcal{X}, 2^{\mathcal{X}})$
- $\mathcal{L}$: loteries, ensemble des lois à support fini sur $\mathcal{X}$
  $f \Longrightarrow P_f = \langle c_1, p_1; \ldots; c_n, p_n \rangle$, avec $c_1 \precsim_{\mathcal{X}} c_2 \precsim_{\mathcal{X}} \cdots \precsim_{\mathcal{X}} c_n$



- $\succsim_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \succsim$ sur $\mathcal{L}$

Axiomatique de von Neumann-Morgenstern (2/5)

Théorème de von Neumann-Morgenstern (44)

représentation de $\succsim$ sur $\mathcal{L}$ par EU

Rappel sur la terminologie (1/3)

Exemple de Savage

Préparation d'une omelette
Déjà 5 œufs cassés, 6ème œuf intact
3 alternatives/décisions :

- d_1 : casser l'œuf dans l'assiette contenant les cinq œufs ;
- d_2 : le casser dans une autre assiette pour l'inspecter ;
- d_3 : ne pas vous servir de cet œuf.

- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature $=$ {œuf (B)on,œuf (M)auvais}
- $\mathcal{A}$: ensemble des événements $= \{\emptyset, \{B\}, \{M\}, \{B, M\}\}$
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences $=$ {grande omelette, 5 œufs perdus, assiette salie, petite omelette}
- $\mathcal{D}$: ensemble des décisions $= \{d_1, d_2, d_3\}$
- $\mathcal{V}$: ensemble des actes = {fonctions $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$}

Rappel sur la terminologie (2/3)

Exemple de Savage

Préparation d'une omelette
Déjà 5 œufs cassés, 6ème œuf intact
3 alternatives/décisions :

- d_1 : casser l'œuf dans l'assiette contenant les cinq œufs ;
- d_2 : le casser dans une autre assiette pour l'inspecter ;
- d_3 : ne pas vous servir de cet œuf.

- décision d_1
- acte représentant la décision $d_1 = A_{d_1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
  A_{d_1}(œuf bon) $=$ grand omelette
  A_{d_1}(œuf mauvais) $=$ 5 œufs perdus
- Si $P(\text{bon}) = 0.3$ et $P(\text{mauvais}) = 0.7$
  Acte $A_{d_1} \Longrightarrow P(\text{gde omelette}) = 0.3$ et $P(\text{œufs perdus}) = 0.7$

Rappel sur la terminologie (3/3)

Exemple de Savage

Préparation d'une omelette
Déjà 5 œufs cassés, 6ème œuf intact
3 alternatives/décisions :

- d_1 : casser l'œuf dans l'assiette contenant les cinq œufs ;
- d_2 : le casser dans une autre assiette pour l'inspecter ;
- d_3 : ne pas vous servir de cet œuf.

- $\mathcal{L}$: ensemble des loteries $=$ {lois de proba sur $\mathcal{X}$}
- Si $P(\text{bon}) = 0.3$ et $P(\text{mauvais}) = 0.7$
  loterie de $d_1 \Longrightarrow P(\text{grande omelette}) = 0.3$
  $P(\text{œufs perdus}) = 0.7$

Décisions, actes et loteries

Actes et loteries

- Acte : résume une décision en ne tenant compte que des couples (états de la nature,conséquences)
- Loterie : résume un acte en ne tenant compte que des probabilités des conséquences

événement	proba	acte $A1$	acte $A2$
e_1	0.3	cons. $C1$	cons. $C2$
e_2	0.3	cons. $C2$	cons. $C1$
e_3	0.4	cons. $C2$	cons. $C2$

2 actes, 1 seule loterie : $L = \{P(C1) = 0.3\ ;\ P(C2) = 0.7\}$

$\Longrightarrow$ info décision $\geq$ info acte $\geq$ info loterie

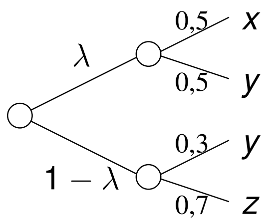
Axiomatique de von Neumann-Morgenstern (3/5)

Théorème de von Neumann-Morgenstern (44)

représentation de $\succsim$ sur $\mathcal{L}$ par EU

Mixage de lois

$\forall P, Q \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in [0,1], \lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{L}$: loterie



$$\langle x, 0.5\lambda; y, (0.5\lambda + 0.3 \times (1-\lambda)); z, 0.7 \times (1-\lambda) \rangle$$

Axiomatique de von Neumann-Morgenstern (4/5)

Axiome 1 : préordre total

$\succsim$ est un préordre total (réflexif, transitif, complet) sur $\mathcal{L}$ non trivial ($\exists P, Q \in \mathcal{L}$ t.q. $P \succ Q$).

Axiome 2 : continuité

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$ tels que $P \succ Q \succ R$, $\exists \alpha, \beta \in]0,1[$ tels que :

$$\alpha P + (1-\alpha) R \succ Q \succ \beta P + (1-\beta) R.$$

Axiome 3 : indépendance

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in]0,1]$:

$$P \succsim Q \Longleftrightarrow \alpha P + (1-\alpha) R \succsim \alpha Q + (1-\alpha) R.$$

Axiomatique de von Neumann-Morgenstern (5/5)

Théorème de von Neumann-Morgenstern

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\succsim$ sur $\mathcal{L}$ vérifie les axiomes 1,2,3.
2. $\succsim$ est représentable par U t.q.

$$U(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i),$$

où $u(x_i) = U(\langle x_i, 1 \rangle)$.

- $u : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ utilité de von Neumann-Morgenstern
- u unique à une transformation affine strictement positive près

3 Décision dans l'incertain

Critère de Wald

Définition

- Choisir l'acte dont la pire conséquence est la meilleure :

$$\text{Argmax}_{f \in \mathcal{V}} \min_{s \in \mathcal{S}} u(f(s)).$$

- idée : principe de prudence.

	s_1	s_2	s_3	min
f_1	20	10	-30	-30
f_2	-10	30	10	-10
f_3	10	20	-5	-5

	s_1	s_2	s_3	min
f_1	20	10	-10	-10
f_2	200	300	-11	-11

Critère d'Hurwicz

Définition

- Choisir l'acte avec le meilleur compromis entre meilleure et pire conséquence :

$$\text{Argmax}_{f \in \mathcal{V}} \left[\alpha \min_{s \in \mathcal{S}} u(f(s)) + (1-\alpha) \max_{s \in \mathcal{S}} u(f(s)) \right],$$

avec $\alpha \in [0,1]$

- idée : compromis entre prudence et optimisme.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Hurwicz
f_1	200	0	0	-10	$\alpha \times (-10) + (1-\alpha) \times 200$
f_2	200	200	200	-11	$\alpha \times (-11) + (1-\alpha) \times 200$

Min Max Regret (1/2)

Définition

- Choisir l'acte dont on regrettera le moins la conséquence :

$$\text{Argmin}_{f \in \mathcal{V}} \max_{s \in \mathcal{S}} R(f,s),$$

avec $R(f,s) = \max_{g \in \mathcal{V}} u(g(s)) - u(f(s))$.

	s_1	s_2	s_3
f_1	20	10	-30
f_2	-10	30	10
f_3	10	20	-5

	s_1	s_2	s_3	max
R_1	0	20	40	40
R_2	30	0	0	30
R_3	10	10	15	15

Min Max Regret (2/2)

	s_1	s_2	s_3
f_1	25	0	10
f_2	9	30	30
f_3	10	15	15

	s_1	s_2	s_3	max
R_1	0	30	20	30
R_2	16	0	0	16
R_3	15	15	15	15

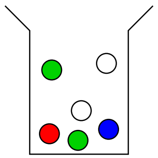
	s_1	s_2
f_1	8	0
f_2	2	4
f_3	1	7

	s_1	s_2	max
R_1	0	7	7
R_2	6	3	6
R_3	7	0	7

Critère de Laplace

Définition

- Choisir l'acte ayant la conséquence moyenne la plus élevée :
$$\text{Argmax}_{f \in \mathcal{V}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{|\mathcal{S}|} u(f(s)).$$
- idée : les événements sont équiprobables.



	R	V	B	$\sum$
f_1	100	0	0	$33,3$
f_2	0	99	99	$66,0$

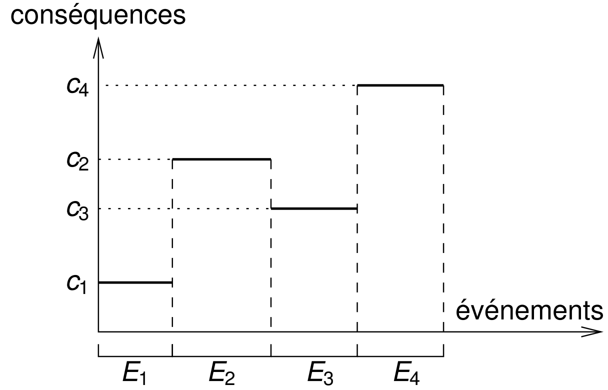
	R	$\neg R$	$\sum$
f_1	100	0	$50,0$
f_2	0	99	$49,5$

Axiomatique de Savage (1/9)

acte : fonction de $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$

Acte simple en escalier

f est un acte simple en escalier s'il existe une partition finie $\{E_i, i \in I\}$ de $\mathcal{S}$, telle que $f(E_i) = \{c_i\}$.



Axiomatique de Savage (2/9)

Acte simple en escalier

f est un acte simple en escalier s'il existe une partition finie $\{E_i, i \in I\}$ de $\mathcal{S}$, telle que $f(E_i) = \{c_i\}$.

Acte en escalier

f est un acte en escalier s'il existe une partition dénombrable $\{E_i, i \in I\}$ de $\mathcal{S}$, telle que $f(E_i) = \{c_i\}$.

Acte constant

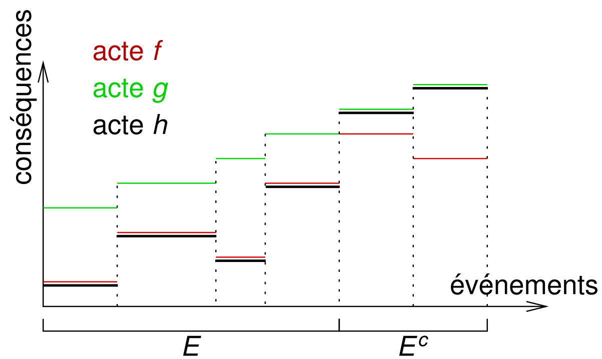
δ_c est un acte constant si $\delta_c(\mathcal{S}) = \{c\}$.

Axiomatique de Savage (3/9)

Greffe

Soit f, g deux actes. Soit $E \subseteq \mathcal{S}$ un événement.

$$\text{acte } h = fEg = \begin{cases} h(s) = f(s) \text{ pour } s \in E, \\ h(s) = g(s) \text{ pour } s \in E^c. \end{cases}$$



Axiomatique de Savage (4/9)

Axiome P1 : préordre total sur les actes

1. $\mathcal{A}$, l'ensemble des événements, est une σ-algèbre.
2. L'ensemble des actes contient l'ensemble des actes en escalier et est fermé pour l'opération de greffe.
3. $\succsim$ est un préordre total.

Axiomatique de Savage (5/9)

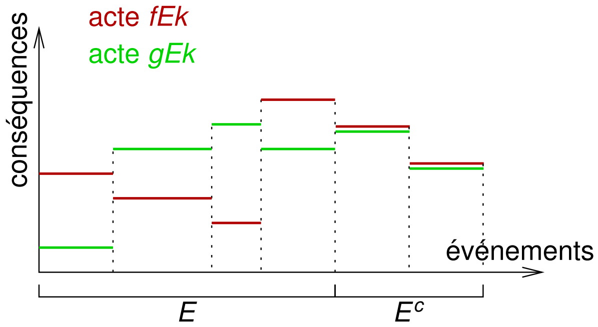
Axiome clé de Savage :

Axiome P2 : Sure thing principle

$\forall$ actes $f, g, h, k \in \mathcal{X}^{\mathcal{S}}$ et $\forall E \subseteq \mathcal{S}$:

$$fEh \succsim gEh \Longleftrightarrow fEk \succsim gEk.$$

Une modification commune d'une partie commune à deux actes ne modifie pas les préférences entre ces actes.



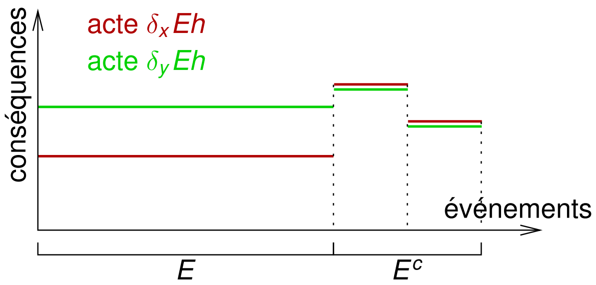
Axiomatique de Savage (6/9)

P2 : $f \succsim_E g \Longleftrightarrow$ pour tout h, $fEh \succsim gEh$

E non négligeable si $\exists f, g$ t.q. $f \succ_E g$

Axiome P3 : existence de préférences dans le certain

$\forall x, y \in \mathcal{X}$, $\forall E \subseteq \mathcal{S}$ non négligeable, $\delta_x \succsim_E \delta_y \Longleftrightarrow x \succsim_{\mathcal{X}} y$, où δ_x, δ_y sont des actes constants.



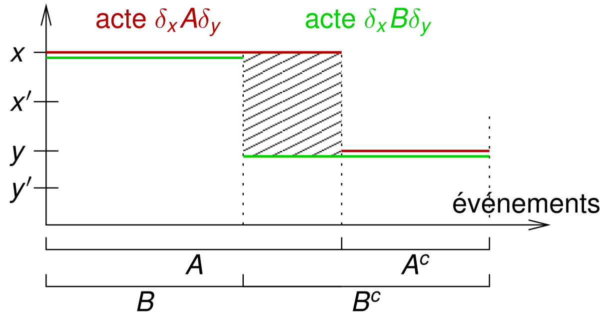
$\Longrightarrow$ un traumatisme émotionnel ne peut bouleverser la hiérarchie des valeurs

Axiomatique de Savage (7/9)

Axiome P4 : préférences sur les événements

$\forall x, x', y, y' \in \mathcal{X}$ tels que $x \succ_{\mathcal{X}} y$ et $x' \succ_{\mathcal{X}} y'$, et $\forall A, B \subseteq \mathcal{S}$,

$$\delta_x A \delta_y \succsim \delta_x B \delta_y \Longleftrightarrow \delta_{x'} A \delta_{y'} \succsim \delta_{x'} B \delta_{y'}.$$



interprétation : puisque ça ne dépend pas des conséquences, c'est que l'on pense que A a plus de chances de se produire que B.

Axiomatique de Savage (8/9)

Axiome P5 : non trivialité des préférences dans le certain

Il existe $x, y \in \mathcal{X}$ tels que $\delta_x \succ \delta_y$.

Axiome P6 : continuité

$\forall$ actes $f, g \in \mathcal{X}^{\mathcal{S}}$ tels que $f \succ g$, $\forall x \in \mathcal{X}$,
$\exists E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \subseteq \mathcal{S}$, tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \delta_x E_i f \succ g \text{ et } f \succ \delta_x E_i g.$$

interprétation : chaque E_i est jugé suffisamment peu probable pour que la modification de f sur E_i ne renverse pas les préférences
$\Longrightarrow$ les $\delta_x E_i f$ sont très «proches» les uns des autres

Axiomatique de Savage (9/9)

Théorème de Savage (54)

Si P1 à P6 sont vérifiés, $\succsim$ est représentable par EU :

$$U(f) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) u(f(s)).$$

Remarque : on n'a jamais supposé l'existence d'une loi de proba

$\Longrightarrow$ elle découle des axiomes

$\Longrightarrow$ probabilités subjectives

$\Longrightarrow$ Subjective Expected Utility (SEU)

4 Attitude vis à vis du risque

La notion d'équivalent certain

Définition pour les loteries

- Soit L une loterie quelconque $\Longrightarrow U(L) =$ l'utilité de L
- Notation : $\text{CE}_L =$ équivalent certain de L
- $\text{CE}_L =$ la loterie $\langle x, 1 \rangle$ telle que $U(\text{CE}_L) = U(L)$

Définition pour les actes

- Soit f un acte quelconque $\Longrightarrow U(f) =$ l'utilité de f
- Notation : $\text{CE}_f =$ équivalent certain de f
- $\text{CE}_f =$ l'acte constant $\delta_{U(f)}$

Prix de vente d'une loterie (1/3)

- Loterie $X = \langle x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n \rangle$
  $= $ une distribution de probabilité sur $\mathcal{X}$
  $\equiv$ variable aléatoire sur $\mathcal{X}$

- Hypothèse pour la suite : $\mathcal{X} = \mathbb{R}$
- Richesse initiale w_0 fixée
- Richesse finale $W_f = \langle w_0 + x_1, p_1; \ldots; w_0 + x_n, p_n \rangle = w_0 + X$
  où $X = \langle x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n \rangle$

Exemple :

On possède w_0 € et on en investit une partie à la bourse

Prix de vente d'une loterie (2/3)

- Richesse initiale w_0
- Richesse finale $W_f = w_0 + X$, où $X =$ loterie
- Équivalent certain de $W_f = \texttt{CE}_f$
- $\texttt{CE}_f =$ loterie certaine $\sim W_f$

$\Longrightarrow \texttt{CE}_f - w_0$ revient à se débarrasser de X

Définition

Prix de vente de la loterie X : $p_v = \texttt{CE}_f - w_0$

Prix de vente d'une loterie (3/3)

Interprétation :

- $U(\texttt{CE}_f) = U(w_0 + X)$

$\Longrightarrow p_v =$ prix minimum exigé pour vendre la loterie X

Application : souscription d'une assurance $\Longrightarrow p_v < 0$

Neutralité vis-à-vis du risque

Théorème

- Richesse initiale w_0, richesse finale $W_f = w_0 + X$
- Décideur maximisateur d'espérance d'utilité
- Si l'utilité de von Neumann-Morgenstern est linéaire alors :

$$p_v = E(X)$$

$E(X) =$ espérance de X, pas l'espérance d'utilité !

$\Longrightarrow$ 2 loteries de même espérance $\Longrightarrow$ même prix

$\Longrightarrow \left\langle x_1, \frac{1}{2}; x_2; \frac{1}{2} \right\rangle \sim \left\langle \frac{x_1+x_2}{2}, 1 \right\rangle$

$\Longrightarrow$ le décideur ne prend pas en compte le risque

Neutralité au risque

Un décideur, maximisateur d'EU, est neutre vis-à-vis du risque si son utilité de von Neumann-Morgenstern est linéaire.

Aversion au risque / goût pour le risque

Aversion au risque

Un décideur, maximisateur d'EU, est adversaire du risque si

$$p_v < E(X)$$

Goût pour le risque

Un décideur, maximisateur d'EU, a du goût pour le risque si

$$p_v > E(X)$$

Théorème

Soit une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern strictement croissante, alors :

- si elle est strictement concave, $p_v < E(X)$
- si elle est strictement convexe, $p_v > E(X)$

Résumé : attitude face au risque

Aversion faible pour le risque – Arrow(65), Pratt(64)

Un agent a de l'aversion faible pour le risque si, pour toute loterie L, il préfère l'acte certain d'espérance $E(L)$ à l'acte L :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ \langle E(L), 1\rangle \succsim L.$$

L'agent a du goût faible pour le risque si : $\forall L \in \mathcal{L},\ L \succsim \langle E(L), 1\rangle$.

L'agent est neutre vis à vis du risque si : $\forall L \in \mathcal{L},\ L \sim \langle E(L), 1\rangle$.

$\Longrightarrow$ concavité de u = aversion au risque

Risque : deux questions

concavité de $u \Longleftrightarrow$ aversion faible au risque

$\Longrightarrow$ deux questions :

1. Peut-on caractériser si un décideur a plus ou moins d'aversion au risque ?
2. Peut-on caractériser si une situation est plus ou moins risquée ?

Coefficient d'aversion absolue au risque (1/2)

- Richesse initiale w_0 ; richesse finale $W_f = w_0 + X$
- X : loterie d'espérance μ et de variance σ^2
- Équivalent certain de $W_f = \mathrm{CE}_f$
- Prix de vente de la loterie X : $p_v = \mathrm{CE}_f - w_0$
- u : fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern

$\Longrightarrow U(\mathrm{CE}_f) = U(W_f) = U(w_0 + p_v)$

Formule de Taylor autour de $w_0 + \mu \Longrightarrow p_v - \mu \approx \dfrac{\sigma^2}{2} \dfrac{u''(w_0+\mu)}{u'(w_0+\mu)}$

Coefficient d'aversion absolue au risque (2/2)

$$p_v - \mu \approx \frac{\sigma^2}{2}\frac{u''(w_0+\mu)}{u'(w_0+\mu)}$$

- $\frac{\sigma^2}{2}$: indicateur du risque véhiculé par la loterie X
- $\frac{u''}{u'}$: allure de la fonction d'utilité ($\Longrightarrow$ attitude vis-à-vis du risque)

Coeff d'aversion absolue pour le risque – Arrow(65), Pratt(64)

$$R_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

⚠ Il est généralement admis que $R_A(x)$ décroît avec x

Remarque : plus $R_A(x)$ est élevé, plus on est adversaire du risque $\Longrightarrow$ comparaisons entre agents

Quantité du risque

- Mesure de quantité de risque ?
- Variance ? Arrow-Pratt : $p_v - \mu \approx \frac{\sigma^2}{2}\frac{u''(w_0+\mu)}{u'(w_0+\mu)}$
- Rothschild & Stiglitz (1970) :

  La variance n'est pas le meilleur des indicateurs :

Utiliser la notion de ≪Mean Preserving Spread≫

Mean Preserving Spread

x	$P(x)$
-2	0.09
4	0.30
10	0.40
16	0.21

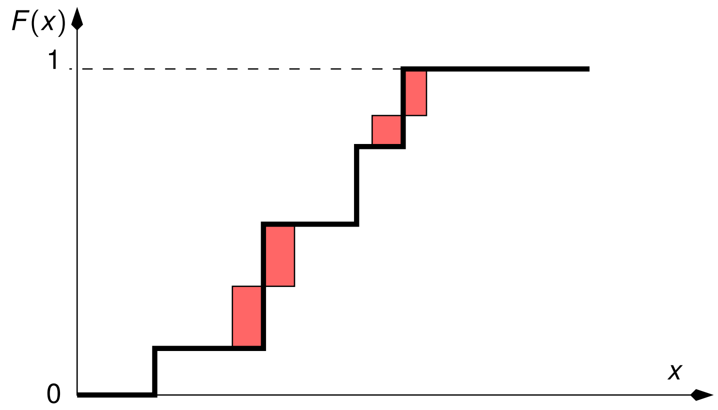
z	$Q(z)$
-2	0.09
3	0.15
5	0.15
10	0.40
12	0.07
18	0.14

- Z a la même espérance que X
- Z déduit de X en remplaçant des valeurs certaines par des loteries $\Longrightarrow$ Z plus risqué que X

$Z = X+$ un bruit blanc = Mean preserving spread

interprétation graphique du MPS

$X \Longrightarrow P(x) \Longrightarrow F(x) = P(z \leq x)$



$Y = \text{MPS}(X) \Longrightarrow \int_{-\infty}^{T} F_Y(x)dx \geq \int_{-\infty}^{T} F_X(x)dx$ pour tout T

Dominance stochastique et Mean Preserving Spread

Définition : dominance stochastique d'ordre 2

- X et Y deux loteries
- X domine stochastiquement Y, noté $X \succsim_{DS2} Y$, si :

$$\int_{-\infty}^{T} F_Y(x)dx \geq \int_{-\infty}^{T} F_X(x)dx \text{ pour tout } T$$

Mean Preserving Spread

- X et Y deux loteries
- on dit que $Y = \mathrm{MPS}(X)$ (autrement dit, Y est un accroissement de risque à moyenne fixée de X) si :
  1. $E(X) = E(Y)$
  1. $X \succsim_{DS2} Y$

Attitude face au risque – Rothschild & Stiglitz (1970)

Aversion forte pour le risque – Rothschild & Stiglitz (1970)

- Un agent a de l'aversion forte pour le risque si :
  pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \mathrm{MPS}(X)$, $X \succsim Y$
- Un agent a un goût fort pour le risque si :
  pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \mathrm{MPS}(X)$, $Y \succsim X$
- Un agent est neutre vis-à-vis du risque si :
  pour toutes loteries X, Y telles que $Y = \mathrm{MPS}(X)$, $Y \sim X$

$\forall X,\ X = \mathrm{MPS}(E(X)) \Longrightarrow$ aversion forte $\Longrightarrow$ aversion faible

Réciproque ?

Conclusion sur l'attitude face au risque

Proposition de Rothschild & Stiglitz (1970-71)

- agent maximisateur d'espérance d'utilité
- les 3 assertions suivantes sont équivalentes :
  1. l'agent a de l'aversion faible pour le risque
  2. l'agent a de l'aversion forte pour le risque
  3. la fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern de l'agent est concave

Quelques références sur l'axiomatique d'EU

Références

1. J. von Neumann & O. Morgenstern (1947)
   "Theory of Games and Economic Behaviour",
   Princetown University Press
2. L. J. Savage (1954)
   "The Foundations of Statistics", Dover
3. A. Chateauneuf, M. Cohen & J.-M. Tallon (2006)
   "Décision dans le risque : mesure du risque, aversion pour le risque, modèle classique d'utilité espérée, paradoxe d'Allais, modèles à niveaux de sécurité et de potentiel", in *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*, Vol 2, chapitre 1, Hermes
4. A. Chateauneuf, M. Cohen & J.-Y. Jaffray (2006)
   "Décision dans l'incertain : les modèles classiques", in *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*, Vol 2, chapitre 2, Hermes

Quelques références sur l'aversion au risque

Références

5. L. Eeckhoudt & C. Gollier (1992)
   "Les risques financiers – Evaluation, Gestion, Partage",
   Ediscience International
6. J. Pratt (1964)
   "Risk aversion in the small and in the large",
   Econometrica, Vol. 32, pp. 122–136
7. K.J. Arrow (1965)
   "The theory of risk aversion", *in Aspects of the Theory of Risk Bearing*, pp.90–120, Yrjo Jahnsson Fondation, Helsinki.
8. M. Rotschild & J. Stiglitz (1970)
   " Increasing risk I : A definition",
   Journal of Economic Theory, Vol. 2, pp.225–243
9. M. Rotschild & J. Stiglitz (1971)
   " Increasing risk II : Its economic consequences",
   Journal of Economic Theory, Vol. 3, pp.66–84