Compléments de cours de MODE

1. limites descriptives de EU

1.1 Rationalité $\Longrightarrow$ préférences transitives

Dans la relation de préférences $\succsim$, on peut distinguer deux sous-parties : la partie symétrique $\sim$ et la partie asymétrique $\succ$. La première représente l'indifférence ($a \sim b$ si le décideur aime autant a que b et réciproquement), la deuxième représente la préférence stricte ($a \succ b$ si le décideur apprécie plus a que b). D'une manière générale, les préférences strictes ne sont marquées que pour des objets de caractéristiques relativement différentes : il faut dépasser un certain seuil de différence pour que le décideur puisse juger deux objets comme étant réellement différents. Ceci peut entraîner des intransitivités dans la relation d'indifférence, comme le montre l'exemple suivant de Luce (1956) : considérons un décideur aimant son café sucré. Il ne saura faire la différence, gustativement, entre une tasse de café non sucrée et une tasse dans laquelle on aura versé un grain de sucre. De même, il ne pourra faire la différence entre une tasse avec 1 grain de sucre et une avec 2 grains de sucre. Plus généralement, il lui sera impossible de faire la différence entre une tasse avec n grains de sucre et une tasse avec $n+1$ grains de sucre. En revanche, le décideur saura faire la différence entre un café sans sucre et un café avec un morceau de sucre. Il n'y a donc pas transitivité de la relation d'indifférence puisque $(0 \sim 1) \wedge (1 \sim 2) \Longrightarrow (0 \sim 2)$ et, par récurrence, pour tout n, $(0 \sim n) \wedge (n \sim n+1) \Longrightarrow (0 \sim n+1)$. Par conséquent, s'il y avait transitivité, on devrait avoir l'indifférence entre café sucré et non sucré. Il existe donc des axiomatiques, notamment celles proposées par Fishburn, qui ne supposent pas la transitivité de la relation d'indifférence.

D'une manière générale, il est plus communément admis que la relation de préférence stricte d'un décideur rationnel doit être transitive. L'exemple suivant (Packard (1982)) montre qu'une telle supposition ne s'applique pas dans tous les cas. Considérons les 3 dés suivants :

	1	
4	1	4
	4	
	4	

(a)

	3	
3	3	3
	3	
	3	

(b)

	2	
5	2	5
	2	
	2	

(c)

Un agent A vous propose de jouer au jeu suivant : lui et vous misez chacun 1 €. Ensuite, vous choisissez un dé parmi les 3 ci-dessus. Il choisit alors un autre dé. Chacun lance son dé et, celui qui a la plus grande valeur remporte les mises. Afin de choisir le meilleur dé, c'est-à-dire celui qui a le plus de chances de vous faire remporter la mise, vous comparez les dés deux à deux. Entre (a) et (b), il vaut mieux choisir (a) car (a) a 4 chances sur 6 d'avoir une valeur supérieure à (b). De même, (b) est préférable à (c) car il a 4 chances sur 6 d'avoir une valeur supérieure. Par conséquent, (a) $\succ$ (b) et (b) $\succ$ (c). Par transitivité, on devrait donc avoir également (a) $\succ$ (c), mais c'est le contraire qui apparaît. En effet, pour que (a) batte (c), il faut que (a) tombe sur un 4 et que (c) tombe sur un 2, il y a donc $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$. Le dé (c) est donc préférable à (a). Il n'y a donc pas de transitivité de la relation de préférence stricte.

1.2 L'axiome de continuité

L'axiome de continuité de von Neumann-Morgenstern stipule que, pour tous $P, Q, R \in \mathcal{L}$ tels que $P \succ Q \succ R$, il existe $\alpha, \beta \in]0,1[$ tels que $\alpha P + (1-\alpha)R \succ Q \succ \beta P + (1-\beta)R$.

Considérons maintenant l'exemple suivant :

$$\begin{cases} P = \langle \text{gagner 2 bonbons}, 1\rangle \\ Q = \langle \text{gagner 1 bonbon}, 1\rangle \\ R = \langle \text{être pendu demain à l'aube}, 1\rangle \end{cases}$$

Alors, si l'on aime les bonbons, on préfère strictement P à Q. De plus, à moins d'être suicidaire, on préfère Q à R. On a donc bien $P \succ Q \succ R$. L'axiome de continuité indique donc qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha P + (1-\alpha)R \succ Q$. Autrement dit, il existe un α, sans doute très petit, pour lequel on préfère obtenir 2 bonbons, mais avec la possibilité d'être pendu, plutôt que de n'obtenir qu'un seul bonbon. Expérimentalement, personne n'est prêt à prendre ce risque, si minime soit il, pour un seul bonbon. L'axiome de continuité est donc violé dans ce cas.

1.3 L'axiome d'indépendance

Nous avons vu en cours des violations de l'axiome d'indépendance. En voici un nouvel exemple. Une mère a deux enfants A et B. Elle a un seul cadeau à donner à A ou à B. Elle aime autant ses deux enfants et est donc indifférente entre donner le cadeau à A ou à B : $P \sim Q$, où $P = \langle A, 1\rangle$ et $Q = \langle B, 1\rangle$. D'après l'axiome d'indépendance, si $R = \langle A, 1\rangle$, la maman devrait être indifférente entre $\alpha P + (1 - \alpha)R$ et $\alpha Q + (1 - \alpha)R$, autrement dit, sa relation de préférence devrait vérifier : $\langle B, 1/2; A, 1/2\rangle \sim \langle A, 1/2; A, 1/2\rangle$. L'axiome d'indépendance suggère donc que la maman est indifférente entre choisir à pile ou face lequel des deux enfants aura le cadeau, ou bien le donner à A sans que B ait de chance d'obtenir le cadeau.

2. Importance de l'axiome d'indépendance dans EU

Nous avons vu en cours des exemples dans lesquels l'axiome d'indépendance était violé. Cet axiome est tout de même important car on peut montrer que, si on ne le respecte pas, on s'expose à des pompes monétaires, c'est-à-dire à des cas où on sera prêt à donner systématiquement de l'argent en échange de rien du tout. En effet, supposons que l'on préfère strictement un objet x à un objet y :

$$\langle x, 1\rangle \succ \langle y, 1\rangle. \tag{1}$$

Imaginons que l'on viole l'axiome d'indépendance, autrement dit, pour un z et une probabilité p donnés,

$$\langle y, p; z, (1-p)\rangle \succ \langle x, p; z, (1-p)\rangle. \tag{2}$$

D'après l'équation (1), x est strictement préféré à y, donc, pour un ϵ très proche de 0, on a également :

$$\langle x - \epsilon, 1\rangle \succ \langle y, 1\rangle. \tag{3}$$

Revenons à l'équation (2). Puisque la préférence est stricte, pour ϵ très proche de 0, on devrait également avoir :

$$\langle y, p; z - \epsilon, (1-p)\rangle \succ \langle x, p; z, (1-p)\rangle. \tag{4}$$

Prenons une pièce pipée qui a une probabilité p de tomber sur pile et $(1-p)$ de tomber sur face. Dans l'équation ci-dessus, $\langle y, p; z - \epsilon, (1-p)\rangle$ s'interprète alors de la manière suivante : on lance la pièce et, si elle tombe sur pile, on obtient y, sinon on obtient $z - \epsilon$. Or, d'après l'équation (3), $\langle x - \epsilon, 1\rangle \succ \langle y, 1\rangle$. Donc, lorsque la pièce tombe sur pile, on devrait préférer $x - \epsilon$ à y, ce qui implique :

$$\langle x - \epsilon, p; z - \epsilon, (1-p)\rangle \succ \langle y, p; z - \epsilon, (1-p)\rangle.$$

Enfin, par transitivité de la relation $\succ$, l'équation ci-dessus ainsi que (4) impliquent que :

$$\langle x - \epsilon, p; z - \epsilon, (1-p)\rangle \succ \langle x, p; z, (1-p)\rangle.$$

On peut donc amener le décideur à choisir une loterie totalement dominée par une autre. C'est ce que l'on appelle un Dutch book.

3. Définitions de RDU

3.1 RDU dans un espace discret

Nous avons vu en cours que RDU s'écrivait de la manière suivante :

$$RDU(x) = u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)(u(x_i) - u(x_{i-1})). \tag{5}$$

De temps à autre, il peut être intéressant de le formuler de la manière suivante, tout à fait équivalente :

$$RDU(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[\varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right) - \varphi\left(\sum_{k=i+1}^{n} p(x_k)\right)\right] u(x_i). \tag{6}$$

Pour obtenir (6), il suffit d'expanser (5) et d'utiliser le fait que $\varphi(1) = 1$:

$$\begin{aligned} RDU(x) = & \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} p(x_k)\right) u(x_1) \\ & + \quad \varphi\left(\sum_{k=2}^{n} p(x_k)\right)[u(x_2) - u(x_1)] \\ & + \quad \varphi\left(\sum_{k=3}^{n} p(x_k)\right)[u(x_3) - u(x_2)] \\ & + \quad \cdots \\ & + \quad \varphi\left(p(x_n)\right)[u(x_n) - u(x_{n-1})]. \end{aligned}$$

Maintenant, en rassemblant les termes en $u(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, on obtient :

$$\begin{aligned} RDU(x) = & \quad \left[\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} p(x_k)\right) - \varphi\left(\sum_{k=2}^{n} p(x_k)\right)\right] u(x_1) \\ & + \quad \left[\varphi\left(\sum_{k=2}^{n} p(x_k)\right) - \varphi\left(\sum_{k=3}^{n} p(x_k)\right)\right] u(x_2) \\ & + \quad \left[\varphi\left(\sum_{k=3}^{n} p(x_k)\right) - \varphi\left(\sum_{k=4}^{n} p(x_k)\right)\right] u(x_3) \\ & + \quad \cdots \\ & + \quad \varphi\left(p(x_n)\right) u(x_n), \end{aligned}$$

d'où l'équation (6) puisque $\varphi(0) = 0$.

3.2 RDU et intégrale de Choquet

Dans le cours numéro 2, juste avant l'axiomatique de RDU, nous avons vu que RDU pouvait s'exprimer de la manière suivante :

$$RDU(X) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(P(u(X) > t))dt. \tag{7}$$

Nous allons maintenant montrer que cette expression correspond bien à la toute première définition que nous avions donnée de RDU :

$$RDU(x) = u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)(u(x_i) - u(x_{i-1})). \tag{8}$$

Tout d'abord, notons que :

$$[u(x_i) - u(x_{i-1})] = \int_{u(x_{i-1})}^{u(x_i)} 1dt. \tag{9}$$

De plus,

$$\varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right) = \varphi(P(u(X) \geq u(x_i))) = \varphi(P(u(X) > u(x_{i-1}))). \tag{10}$$

Par conséquent, des équations (9) et (10), on en déduit, pour tout $i \geq 2$:

$$\varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)[u(x_i) - u(x_{i-1})] = \int_{u(x_{i-1})}^{u(x_i)} \varphi(P(u(X) > t))dt,$$

et donc :

$$\sum_{i=2}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)[u(x_i) - u(x_{i-1})] = \int_{u(x_1)}^{u(x_n)} \varphi(P(u(X) > t))dt. \tag{11}$$

Or il n'existe pas $x \in \mathcal{X}$ tel que $u(x) > u(x_n)$. donc $P(u(x) > u(x_n)) = 0$ et l'équation (11) peut se réécrire :

$$\sum_{i=2}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)[u(x_i) - u(x_{i-1})] = \int_{u(x_1)}^{\infty} \varphi(P(u(X) > t))dt. \tag{12}$$

Pour terminer la démonstration, il nous reste deux cas à examiner.

1er cas : Supposons que $u(x_1) \geq 0$. Alors :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1]dt = \int_{-\infty}^{0} 1 - 1dt = 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{u(x_1)} \varphi(P(u(X) > t))dt = \int_{0}^{u(x_1)} 1dt = u(x_1) \end{cases}$$

En couplant ceci avec l'équation (12), on en déduit que :

$$u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left(\sum_{k=i}^{n} p(x_k)\right)(u(x_i) - u(x_{i-1})) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1]dt + \int_{0}^{\infty} \varphi(P(u(X) > t))dt,$$

et donc qu'il y a bien équivalence entre les équations (7) et (8).

2ème cas : Supposons que $u(x_1) < 0$. Alors :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{u(x_1)} [\varphi(P(u(X) > t)) - 1]dt = \int_{-\infty}^{u(x_1)} 1 - 1dt = 0 \\ \displaystyle\int_{u(x_1)}^{0} -1dt = u(x_1) \end{cases}$$

Or, si l'on rajoute ces deux termes à l'équation (12), on obtient précisément l'équation (7). Donc, il y a bien équivalence entre les équations (7) et (8).