M1 IAD UE Décision et Jeux
TD N°3

Christophe Gonzales   Pierre-Henri Wuillemin

19 février 2007

Exercice 1

Un décideur a EU pour critère, avec une fonction d'utilité de vNM sur un ensemble de résultats $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ de la forme :

$u \,:\, x \mapsto u(x) = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma\,;$

on sait de plus que ses préférences dans le certain croissent strictement avec les résultats et qu'il est adversaire strict du risque.

1°) a) Que peut-on en déduire sur la valeur de α et sur l'ensemble $\mathcal{C}$?

b) On impose dorénavant $\alpha = -1$ et $\gamma = 0$; expliquer pourquoi ce n'est pas une restriction.

2°) Soit $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des lois de probabilité à support dans $\mathcal{C}$ qui possèdent une variance. Montrer que les préférences du décideur dans $\mathcal{P}_0$ sont représentables par la fonction d'utilité linéaire

$U \,:\, P \mapsto U(P) = \beta\, E_P - E_P^2 - V_P$,

où E_P et V_P désignent respectivement l'espérance et la variance de P.

Décrire la famille des courbes d'indifférence du décideur dans la partie accessible (que l'on déterminera) du plan des (E,V).

3°) On sait que $\beta \geq 0$. On suppose que le décideur s'il répartit un certain capital en proportions λ et $(1-\lambda)$, respectivement, entre deux investissements obtiendra un résultat aléatoire $Y_\lambda = \lambda\, X' + (1-\lambda)\, X''$, où X' et X'' sont deux variables aléatoires de moyennes $E' = 0$ et $E'' = 1$ et de variances $V' = 0$ et $V'' = 1$.

a) Quelles sont la moyenne $E_\lambda$et la variance V_λ de Y_λ ? Exprimer V_λ en fonction de E_λ.

b) Déterminer pour chaque valeur possible de β la valeur de λ qui maximise l'utilité du décideur.

Exercice 2

Un décideur a EU pour critère, avec une fonction d'utilité de vNM

$u\,:\,x \mapsto u(x) = \lambda[1 - \exp(-\frac{x}{\lambda})].$

dans l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles EU existe.

On note $\mathcal{N}(m, \sigma)$ la loi normale de densité

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}]$

et $\mathcal{N}$ l'ensemble des lois normales ;

1°) Montrer que le décideur a pour fonction d'utilité dans $\mathcal{N}$ la fonction U :

$N(m, \sigma) \mapsto U(\mathcal{N}(m, \sigma)) = \lambda[1 - \exp[-\frac{1}{\lambda}(m - \frac{\sigma^2}{2\lambda})]$

2°)a) Déterminer l'équivalent-certain de $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

b) En déduire une fonction d'utilité simple représentant les préférences du décideur dans $\mathcal{N} \cup \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des lois certaines.

3°) Un premier investissement peut apporter un gain aléatoire X_1 de loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et un deuxième X_2 de loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$; la réalisation simultanée de ces deux investissements rapporterait $X_1 + X_2$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

a) Le décideur préfère X_1 au *statu quo* ; il préfère aussi X_2 au *statu quo*. Préfère-t-il alors nécessairement $X_1 + X_2$ à X_1 et à X_2 ?

b) Que doit-il faire s'il a en outre la possibilité de réaliser (seul ou simultanément aux autres) un troisième investissement apportant un gain certain $x_0 > 0$?

Exercice 3

Paradoxe de Saint-Petersbourg (dû à Nicolas Bernoulli en 1713 ; Daniel Bernoulli, son neveu, en proposa une solution en 1738). Un casino vous propose le jeu suivant. Une pièce de monnaie non truquée ($Pr(Pile) = Pr(Face) = \frac{1}{2}$) va être lancée autant de fois que nécessaire ; les tirages sont supposés indépendants. Si $Face$ sort au 1^{er} lancer, le casino vous verse 2€ et le jeu s'arrête ; sinon, on procède à un 2^e lancer ; si $Face$ sort à ce 2^e lancer, le casino vous verse $2^2 = 4$€ et le jeu s'arrête ; sinon, on procède à un 3^e lancer ; etc. : la règle est que le jeu s'arrête au n^e lancer si $Face$ y sort pour la première fois et que vous recevez alors 2^n€ .
Pour prendre part au jeu on vous demande de miser une somme de M€ .

a) Pour quelles valeurs de M accepteriez-vous de miser? (*réponse personnelle*)

b) Que valent vos espérances de gain (EG) brut et net (pour une mise de M€) à ce jeu.

c) Supposons que vous ayez la possibilité de jouer *pour une mise nulle*. Quel serait pour vous l'équivalent-certain du jeu, c.-à-d. la somme certaine $\bar{c}$ qu'il faudrait vous proposer, au moins,

pour que vous renonciez à jouer? (*réponse personnelle*)
M du (a) et $\bar{c}$ sont-ils du même ordre de grandeur?

d) Selon D.Bernoulli, votre critère pour des gains $x > 0$ est en fait l'espérance d'utilité, avec pour fonction d'utilité ("de vNM", mais c'est un anachronisme!) $u(x) = \log_2(x)$.
Utilisant le fait que : $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4$,
montrer que $\bar{c} = 4$.

Exercice 4

Le Décideur (un patron-pêcheur) a la possibilité d'assurer son bateau, valant $100\,k$€ (milliers d' €) et constituant sa fortune initiale, contre :

- une panne (événement A_1), de probabilité $p_1 = 1/10$, de coût $10\,k$€ ;

et

- un naufrage (événement A_2), de probabilité $p_2 = 1/100$, de coût $100\,k$€ .

A_1, A_2 et $A_3 = (A_1 \cup A_2)^c$ forment une partition. Le décideur a pour critère EU, avec pour utilité de vNM $u(.)$ la fonction :

$$x \longmapsto u(x) = \begin{cases} 100(x - 75) & \text{pour } \; x \geq 75 \\ \\ 200(x - 75) & \text{pour } x < 75 \end{cases}$$

où x est son état de fortune (exprimé en $100\,k$€

Il a le choix entre :

- ne pas s'assurer (décision δ);
- s'assurer complètement avec une franchise de $5\,k$€ (décision d_1) (l'assurance rembourse le coût du sinistre moins la franchise) ;
- s'assurer à 70% (décision d_2) (l'assurance ne rembourse que 70% du coût du sinistre).

S'il s'assure, il doit payer une prime d'assurance c_1 pour d_1 et c_2 pour d_2.

1°)*a*) L'Assureur fixe les montants des primes de façon que son espérance mathématique de gain soit nulle (*valeur actuarielle).* Calculer c_1 et c_2.

b) Quelle est l'attitude vis-à-vis du risque du Décideur? Que préfère-t-il entre les décisions δ, d_1 et d_2?

2°) On se place désormais dans l'hypothèse suivante : le Décideur pense que si l'Assureur a à lui rembourser une somme supérieure à $5\,k$€ , il y a une probabilité 1/2 qu'il lui rembourse bien toute cette somme et une probabilité 1/2 qu'il ne soit pas solvable et ne lui rembourse que $5\,k$€ .

a) Quelle est maintenant la meilleure décision?

b) Est-il prêt à payer, avant de prendre sa décision, $1\,k$€ à un expert capable de lui dire, immédiatement et avec certitude, si l'Assureur est solvable? (On construira l'arbre de décision correspondant à ce problème).

Exercice 5

Le décideur, D, propriétaire d'un petit terrain dans une zone pétrolifère, doit choisir entre forer (F) et ne pas forer ($\overline{F}$) un puits, qui pourra se révéler non-productif (N), assez productif (A), ou très productif (T).
Les probabilités a priori de ces événements et les gains (algébriques) possibles pour chacune des deux décisions sont donnés par le tableau suivant :

Evénement E	N	A	T
Probabilité a priori de E	0,5	0,25	0,25
Gain apporté par F si E	-100	100	500
Gain apporté par $\overline{F}$ *si* E	0	0	0

Tous les gains sont exprimés dans une même unité monétaire.

Avant de choisir entre F et $\overline{F}$, D peut faire procéder à un sondage sismique (S), qui lui coûterait 10 unités, ou ne pas y avoir recours ($\overline{S}$).
Le pronostic résultant du sondage peut être bon (B) ou mauvais (M).

Par expérience, on sait que les probabilités d'un bon et d'un mauvais pronostic pour les puits non-productifs, assez productifs et très productifs sont les suivantes :

Evénement E	N	A	T
Probabilité de B si E	0,2	0,6	0,8
Probabilité de M si E	0,8	0,4	0,2

1°) Construire l'arbre de décision du problème en indiquant les probabilités conditionnelles de chaque branche issue d'un sommet événementiel.

2°) D a pour critère EU et sa fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern, u, définie sur l'intervalle de gains $]-200,+\infty[$, est $x \mapsto u(x) = \frac{x}{x+200}$.

a) Quelle est l'attitude de D vis-à-vis du risque?
Montrer que pour toute probabilité $p > 0$, il existe une perte M_p (= un gain algébrique $-M_p$) telle qu'il préfère le statu quo à toute décision entraînant avec la probabilité p la perte M_p (quels que soient ses autres gains et pertes).

b) Déterminer la stratégie de décision optimale de D.

3°) On suppose que la fonction u est initialement inconnue de l'analyste, A, qui, par interrogation interactive de D, va chercher à obtenir une information partielle sur u suffisante pour déterminer la stratégie de décision optimale de D.

a) Pourquoi peut-on toujours supposer que A connaît : "$u(0) = 0$; $u(800) = 0{,}8$ "?
b) Montrer que pour déterminer la décision optimale dans l'option $\overline{S}$, A peut se contenter de l'information "$u(-100) \leq -0{,}8$". Quelle question peut-il poser au décideur pour s'en assurer?

c) Montrer que l'information supplémentaire "$u(-10) \geq -\frac{4}{11}$" détermine de plus la décision optimale dans l'option S lorsque le pronostic est M.
Montrer que l'information "$u(-110) \geq -\frac{5}{4}$; $u(490) \geq \frac{2}{3}$" détermine la décision optimale dans cette même option lorsque le pronostic est B.

d) Que suffit-il de savoir de plus pour pouvoir déterminer complètement la stratégie de décision optimale?