M1 IAD UE Décision et Jeux
TD N°2

Christophe Gonzales Pierre-Henri Wuillemin

12 février 2007

Exercice 1

Détermination de préférences individuelles

1°) *a*) L'été dernier, à Bac+3,vous trouviez des propositions d'embauche à un salaire mensuel de 1 500 € avec 7 semaines de vacances par an.
Un autre employeur possible ne donne jamais que 5 semaines ; à partir de quel salaire auriez-vous trouvé sa proposition plus intéressante que les précédentes?
Même question pour un autre employeur qui ne vous aurait laissé que 3 semaines de congés.

b) L'été prochain, à Bac+4, vous pourrez être embauchés à 2 000 € mensuels avec 7 semaines de vacances par an.
Déterminez comme au *a*) les salaires qu'il faudrait vous proposer pour accepter de n'avoir que 5 ou que 3 semaines de vacances.

c) L'été suivant, à Bac+5, vous pourrez gagner 2 500 € avec 7 semaines de vacances par an. Déterminez comme au *a*) et au *b*) les salaires qu'il faudrait vous proposer pour accepter de n'avoir que 5 ou que 3 semaines de vacances.

2°) *a*) A l'aide de vos réponses au 1°) construire approximativement votre réseau de courbes d'indifférence dans l'orthant positif des $x = (x_1,x_2)$ où :
x_1 = nombre de semaines de vacances par an ;
x_2 = salaire mensuel net en €

b) Evaluez et comparez vos taux marginaux de substitution du salaire aux vacances aux différents points construits.

3°) Essayez d'améliorer votre connaissance de vos propres préférences en essayant de construire une utilité additive les représentant. Vous choisirez vous-même la procédure.
Si vos préférences se révèlent représentables par une utilité additive (à la précision de vos réponses près), comparez-les avec celles révélées au 2°). Vous semblent-elles mieux représenter la réalité? Voyez-vous d'autres supériorités?

Exercice 2

Un satellite météorologique est capable à tout moment de recueillir et de transmettre de l'information, mais ne peut pas faire les deux simultanément. Il transmet les données dix fois plus vite qu'il les recueille.

On a choisi l'unité d'information pour qu'en une heure il puisse recevoir 1 unité et en transmettre 10.
Il ne peut évidemment transmettre des données qu'il n'a pas.
(i) Quelle est la quantité maximum $q(t_1,t_2)$ qu'il peut transmettre s'il consacre t_1 heures à recueillir de l'information et t_2 à en transmettre.
(ii) Tracer quelques courbes $q(t_1,t_2) = cte$.
(ii) Comment doit-il choisir t_1 et t_2 pour transmettre le maximum d'information en une journée? en une semaine?

Exercice 3

Echange de ressources par deux agents (Boîte d'EDGEWORTH)

Les couloirs d'une station de métro sont nettoyés chaque nuit par deux robots appartenant l'un à une entreprise A, l'autre à une entreprise B. La capacité de nettoyage d'un robot, évaluée en hectomètres de couloir nettoyés par nuit, est fonction de ses disponibilités en énergie électrique (ressource 1, en dizaines de kWh) et produit nettoyant (ressource 2, en m^3). Elles valent initialement $x^0 = (x_1^0,x_2^0) = (2,9)$ pour A et $y^0 = (y_1^0,y_2^0) = (22,6)$ pour B. Avec $x = (x_1,x_2)$, A peut nettoyer une longueur $f(x) = f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1.x_2}$; de même, avec $y = (y_1,y_2)$, B peut nettoyer une longueur $f(y) = f(y_1,y_2) = \sqrt{y_1.y_2}$.
A et B ont tous deux pour objectif de nettoyer la plus grande longueur de couloir possible. Ils ont la possibilité d'échanger entre eux des quantités quelconques des deux ressources.

1°)a) Montrer que les préférences de A et B dans l'espace desressources peuvent être exprimées par les fonctions d'utilité $u(x) = u(x_1,x_2) = x_1.x_2$ et $u(y) = u(y_1,y_2) = y_1.y_2$.

b) Montrer que le niveau d'utilité atteint par B après échange s'exprime en fonction des quantités $x = (x_1,x_2)$ possédées par A par la fonction $v(x) = v(x_1,x_2) = (24 - x_1)(15 - x_2)$.

c) Montrer que les quantités de ressources dont disposent A et B après échange peuvent être représentées dans le plan des (x_1,x_2) par un point d'un rectangle (la *boîte d'Edgeworth*). Tracer dans ce rectangle quelques courbes d'indifférence de A et de B et, en particulier, celles qui correspondent à leurs niveaux d'utilité initiaux.

d) Un *optimum de Pareto* est une répartition des ressources telle que l'on ne puisse augmenter strictement l'utilité d'un agent sans diminuer strictement celle de l'autre.
La répartition initiale des ressources entre A et B correspond-elle à un optimum de Pareto?

e) Comparer les taux marginaux de substitution (TMS) initiaux de la ressource 2 à la ressource 1 de A et B. Quels sont les taux d'échange $\dfrac{\Delta x_2}{-\Delta x_1}$ qui sont localement bénéfiques à la fois à pour A et pour B.

f) Quels sont les points de la boîte où les taux de substitution de la ressource 2 à la ressource 1 sont les mêmes pour les deux agents? En déduire l'ensemble de tous les optimums de Pareto, puis le sous-ensemble de ceux qui seraient acceptables à la fois par A et B.

2°) Les échanges entre A et B sont réalisés par l'intermédiaire de l'annonce de prix unitaires $p = (p_1,p_2)$ des deux ressources : le vecteur prix p est dit *prix d'équilibre* lorsque les quantités de chacune des ressources que A et B souhaitent acheter ou vendre à ces prix sont exactement oppposées les unes des autres.

a) Montrer que $p = (1,3)$ n'est pas un prix d'équilibre.

b) Montrer que $p^* = (5,8)$ est un prix d'équilibre. Quelles sont les dotations correspondantes $x^* = (x_1^*,x_2^*)$ et $y^* = (y_1^*,y_2^*)$ de A et B?

c) Montrer que p^* est l'unique prix d'équilibre (à une constante multiplicative positive près).

Exercice 4

Soit $Ch(.)$ une fonction de choix sur un ensemble $\mathcal{X}$. Considérons la propriété suivante, (H), dite *axiome de Houttaker* :
$\forall x, y \in A \cap B$, $[x \in Ch(A)$ ET $y \in Ch(B)] \;\Leftrightarrow\; [x \in Ch(B)$ ET $y \in Ch(A)]$

1°) (i) Montrer que (H) entraine la propriété (α) de Sen :
$[x \in B \subseteq A$ ET $x \in Ch(A)] \Rightarrow x \in Ch(B)$.

(ii) Montrer que (H) entraine la propriété (β) de Sen :
$[x,y \in Ch(B)$ ET $B \subseteq A$ ET $y \in Ch(A)] \Rightarrow x \in Ch(A)$.

2°) Montrer que conjointement les propriétés (α) et (β) de Sen entrainent la propriété (H).

Exercice 5

Paradoxe d'Allais
On demande aux sujets d'une expérience sur les préférences dans le risque ce qu'ils choisiraient entre les deux propositions suivantes :

A: *gagner* 10 000 *euros avec certitude* ;

B: *gagner* 50 000 *euros avec probabilité* $\frac{10}{11}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{1}{11}$.

C: *gagner* 10 000 *euros avec probabilité* $\frac{11}{100}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{89}{100}$;

D: *gagner* 50 000 *euros avec probabilité* $\frac{10}{100}$ *et ne rien gagner avec probabilité* $\frac{90}{100}$.

a)Que choisiriez-vous entre A et B ? entre C et D ?

b) On note P' la *perspective aléatoire*, ou *loterie* (lois de probabilités sur les gains) offerte par la proposition A et P'' celle offerte par la proposition B ; on note Q la loi (presque) certaine en 0 (*euros*). exprimer les perspectives aléatoires offertes par les propositions C et D comme mixages de P', P'' et Q.

c) Qu'exigerait le respect de l'axiome d'indépendance de la théorie de vNM ? Vos choix le respectent-ils? Si ce n'est pas le cas essayez d'analyser les raisons de vos choix.

Exercice 6

L'ensemble des résultats (gains) est un intervalle borné $[0,M]$ de $\mathbb{R}_+^*$; Les décisions engendrent toutes des loteries (lois de probabilité à support fini) sur $\mathcal{C}$. Les préférences $\succsim$ du décideur sont représentables par la fonction d'utilité V définie par :

P, loterie de support $\{c_i, i \in I(P)\}$, $\mapsto V(P) = \prod_{i\in I(P)} [c_i^2]^{P(c_i)}$

1°) a) Montrez, à l'aide d'un exemple utilisant des loteries simples que V n'est pas une fonction d'utilité linéaire.

b) $W = \ln \circ V$ est-elle une fonction d'utilité? Est-elle une fonction d'utilité linéaire?

c) La fonction $u : c \mapsto \ln c$ est-elle une fonction d'utilité de vNM ? Quelle est l'attitude du décideur vis-à-vis du risque?

2°) Deux décideurs ayant tous deux V comme fonction d'utilité reçoivent :
- l'un un gain de 1 000 euros si l'événement E_1 se produit, un gain de 3 000 sinon ;
- l'autre un gain de 1 000 euros si l'événement E_2 se produit, un gain de 3 000 sinon.

a) Sachant que $Pr(E_1) = Pr(E_2) = \frac{1}{3}$ et que $Pr(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{9}$, ont-ils intérêt à s'entendre pour que le premier verse 1 000 euros au deuxième si l'événement $\bar{E}_1 \cap E_2$ est réalisé et en reçoive la même somme si $E_1 \cap \bar{E}_2$ l'est.
(on note $\bar{E}$ le complémentaire de E)

b) Quel principe général, lié à l'attitude des décideurs vis-à-vis du risque, ceci illustre-t-il?