# M1 IAD UE Décision et Jeux
# TD N°1

Christophe Gonzales Pierre-Henri Wuillemin

6 février 2007

## Exercice 1

Soit $R$ la relation binaire dans $\mathcal{X} = \{0,1,2\}$ satisfaisant

$$1R2,\ 2R1,\ 0R1,\ 0R2,\ 2R2,$$

et rien d'autre.
$R$ est-elle transitive? réflexive? irréflexive? symétrique? asymétrique? anti-symétrique? acyclique?

## Exercice 2

Soit $R$ une relation binaire dans $\mathcal{X}$, qui est symétrique, transitive et possède la propriété

$$\forall x \in \mathcal{X}, \exists y \in \mathcal{X},\ y\,R\,x$$

Montrez que $R$ est réflexive.

## Exercice 3

Soit $R$ une relation binaire dans $\mathcal{X}$. Montrez que :
( $i$) si $R$ est irréflexive et transitive, alors elle est acyclique ;
( $ii$) si $R$ est acyclique et faiblement complète, alors elle est transitive ;
( $iii$) si $R$ est asymétrique et négativement transitive, alors elle est transitive.

## Exercice 4

Soit $\succ$ et $\sim$ deux relations binaires dans $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ définies par

$$\forall x,y \in \mathcal{X},\ x \succ y \ \Leftrightarrow\ x \geq y+1 \quad \text{ET} \quad x \sim y \ \Leftrightarrow |\ x-y\ |< 1$$

1°) Proposez des interprétations de $\succ$ et $\sim$ lorsque les éléments de X sont des longueurs puis lorsque ce sont des sommes d'argent.

2°)( $i$) A quel type de relation $\succ$ appartient-elle?
($ii$) $\sim$ est-elle une relation d'équivalence?
( $iii$) La relation $\succsim$ définie par

$$\forall x,y \in \mathcal{X},\ x \succsim y \ \Leftrightarrow\ [\ x \succ y \ \text{ OU } x \sim y\ ]$$

est-elle transitive?

## Exercice 5

Etant donné deux relations binaires, $R$ et $S$ dans $\mathcal{X}$ on dit que $S$ *prolonge* $R$ lorsque $\forall x,y \in \mathcal{X}$, $xRy \ \Rightarrow\ xSy$.

1°) Soit $\succ$ une relation acyclique dans $\mathcal{X}$ et soit $\succ_T$ sa *fermeture transitive*, définie par $x \succ_T y \ \Leftrightarrow\ x \succ y$ OU $\exists n \geq 1$ ET $z_i \in$X ($i = 1,..,n$),
$x \succ z_1,\ z_1 \succ z_2,\ \cdots,\ z_{n-1} \succ z_n,\ z_n \succ y$
Montrer que $\succ_T$ est un ordre strict.

2°) Soit $\succ$ un ordre strict dans un ensemble *fini* $\mathcal{X}$. Montrer qu'il existe un ordre strict faiblement complet $\succ^*$ le prolongeant ; pour cela, on donnera un algorithme construisant $\succ^*$ . $\succ^*$ est-il unique?

## Exercice 6

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$, l'ensemble constitué du polygone de sommets $L = (1,1)$; $M = (2,1)$; $N = (2,0)$; $O = (0,0)$; $P = (0,2)$ et $Q = (1,2)$ et de son intérieur.
1°) On considère l'ordre naturel $\geq$:

$$x = (x_1,x_2) \geq y = (y_1,y_2) \Leftrightarrow [x_1 \geq y_1 \text{ET } x_2 \geq y_2]$$

($i$) Quel est l'ensemble, $Adm(E)$, des admissibles dans $E$? Est-il complet dans $E$?
($ii$) Quel est l'ensemble, $Adm(E')$, des admissibles dans $E' = E \setminus [P,Q]$, où $[P,Q]$ désigne le segment d'extrémités $P$ et $Q$? Est-il complet dans $E'$?

2°) Mêmes questions ($i$) et ($ii$) qu'au 1°), mais pour la relation $\succsim$ définie par

$$x \succsim y \Leftrightarrow x = y \text{ OU } \ [x_1 > y_1 \text{ET } x_2 > y_2]$$

## Exercice 7

Une relation binaire $\succ$ dans $\mathcal{X}$ est appelée *ordre d'intervalle* lorsque :
($i$) elle est irréflexive ; et
($ii$) $\forall x,y,z,w \in \mathcal{X}$, $[x \succ y \text{ ET } z \succ w] \Rightarrow [x \succ w \text{ OU } z \succ y]$

1°)
a) Montrer que $\succ$ est un ordre strict.
b) Soit la relation $\succ$ définie dans $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^*$ par

$$x \succ y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} > y\,.$$

Est-elle un ordre d'intervalle? Est-elle négativement transitive?
Tout ordre d'intervalle est-il la partie asymétrique d'un préordre total?

2°) On associe à l'ordre d'intervalle $\succ$ la relation $\succsim^1$ définie par :

$$x \succsim^1 y \Leftrightarrow [\, t \succ x \Rightarrow t \succ y\,]$$

a) Montrer que $\succsim^1$ est réflexive et transitive.
b) Montrer, par l'absurde que $\succsim^1$ est complète. De quel type de relation s'agit-il?
c) On note $\succ^1$ la partie asymétrique de $\succsim^1$. De quel type de relation s'agit-il?
Montrer que : $x \succ y \Rightarrow x \succ^1 y$.

3°) On suppose qu'il existe $A \subseteq \mathcal{X}$, fini ou dénombrable tel que
$x \succ y \Rightarrow \exists a \in A, x \succ a \succ y$.
a) Montrer que $\succ^1$ a la même propriété.
b) En déduire que $\succsim^1$ est représentable par une fonction d'utilité $u$.
c) On associe à $u$ la fonction $v$ définie par
$x \mapsto v(x) = \sup\{u(y) : y \in \mathcal{X} \text{ ET } x \succ y\,\}$.
Montrer que : $x \succ y \Leftrightarrow v(x) > u(y)$.
d) Vérifier ce résultat sur l'exemple du 1°.b).

## Exercice 8

Soit la relation $\succsim$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ définie par

$$x = (x_1,x_2) \succsim y = (y_1,y_2) \Leftrightarrow \frac{x_2}{y_2} \geq [\frac{y_1}{x_1}]^2$$

$(i)$ Montrer que $\succsim$ est un préordre total? est-ce un ordre?
$(ii)$ Trouver une fonction d'utilité, $u$, représentant $\succsim$ .
$(iii)$ La fonction $v$ définie par $v(x) = 2\,ln\ x_1 + ln\ x_2$ est-elle une fonction d'utilité?
$(iv)$ Représenter graphiquement quelques courbes d'indifférence.
$(v)$ Montrer qu'en $x = (x_1,x_2)$ la variation $\Delta x_2$ de la $2^{eme}$ variable permettant de conserver le même niveau d'utilité $\bar{u} = u(x)$ lorsque la $1^{ere}$ variable augmente (algébriquement) de $\Delta x_1$ est telle que

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{-\Delta x_1} = \frac{2x_2}{x_1}$$

(*taux marginal de substitution* de la $2^{eme}$ variable à la $1^{ere}$ en $x$).
$(vi)$ Pourquoi le taux trouvé aurait-il été le même si l'on avait utilisé $v$ au lieu de $u$?