M1 IAD UE Decision et Jeux
Notes de cours (1)

Jean-Yves Jaffray   Patrice Perny

6 février 2007

PREFERENCES et CHOIX

1 Rappel sur les relations binaires

Etant donné un ensemble $\mathcal{X} = \{..,x,y,z,..\}$, on appelle *relation binaire* sur $\mathcal{X}$ un sous-ensemble $R \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. On écrit généralement xRy pour $(x,y) \in R$ et NON xRy pour $(x,y) \notin R$.

1.1 Propriétés de base des relations binaires

Définition 1. La relation binaire R est :

réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{X}$, xRx

irréflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{X}$, NON xRx

symétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathcal{X}$, $[xRy \Rightarrow yRx]$

asymétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathcal{X}$, $[xRy \Rightarrow$ NON $yRx]$

antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathcal{X}$, $[xRy$ ET $yRx \Rightarrow x = y]$

transitive $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in \mathcal{X}$, $[xRy$ ET $yRz \Rightarrow xRz]$

négativement transitive $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in \mathcal{X}$,
[NON xRy ET NON $yRz \Rightarrow$ NON xRz]

complète $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathcal{X}$, $[xRy$ OU $yRx]$

faiblement complète $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathcal{X}, \quad [x = y \text{ OU } xRy \text{ OU } yRx]$

acyclique $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, \forall x_i \in \mathcal{X}, \, i = 1, \cdots, n,$
$$[x_1 R x_2 \text{ ET } x_2 R x_3 \text{ ET } .. \text{ ET } x_{n-1} R x_n] \Rightarrow x_1 \neq x_n.$$

1.2 Relations binaires usuelles

Définition 2. Une relation binaire est un *préordre* lorsqu'elle réflexive and transitive ; c'est un *préordre total* si elle est complète (donc aussi réflexive) et transitive ; un préordre antisymétrique est un *ordre* et un *ordre total* s'il est, de plus, complet.

N.B. *Pour plus de précision, on ajoute parfois l'épithète "large" pour rappeler qu'une relation est réflexive ; on parle alors respectivement de* préordre large, préordre large total*,* ordre large *et* ordre large total *; par économie, nous ne le ferons pas dans ce cours, mais écrirons éventuellement* préordre (large)*,* préordre (large) total*, etc., quand cela paraîtra utile.*
Egalement par souci de clarté, On précisera parfois "(pré)ordre partiel*" pour rappeler que le (pré)ordre considéré peut ne pas être total.*
Par opposition à l'association de l'épithète "large" à la réflexivité, les relations irréflexives seront dites "strictes" :

Définition 3. Une relation binaire est un *ordre strict* lorsqu'elle irréflexive et transitive (donc aussi asymétrique); c'est un *ordre strict total* si elle est de plus faiblement complète.

Notons qu'un ordre strict étant (trivialement) antisymétrique, il n'y a pas lieu d'introduire la notion de "préordre strict".

Définition 4. Une relation binaire est une *équivalence* lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

N.B. *les quantifications "$\forall x \in \mathcal{X}$" ou "$\forall x, y \in \mathcal{X}$" seront le plus souvent omises et sont en particulier sous-entendues dans les exemples et définitions qui suivent.*

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}$, la relation $\geq$ est un ordre (large) total et $>$ est un ordre strict total.

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\geq$ définie par

$$x = (x_1, x_2) \geq y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow [x_1 \geq y_1 \text{ET } x_2 \geq y_2]$$

est un ordre (large), qui n'est pas total ; les relations $>$ et $\gg$ définies respectivement par
$x > y \Leftrightarrow [x \geq y \text{ ET } x \neq y]$ et par $x \gg y \Leftrightarrow [x_1 > y_1 \text{ET } x_2 > y_2]$
sont des ordres stricts mais pas des ordres stricts totaux.

Toujours dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\geq_1$ définie par $x \geq_1 y \Leftrightarrow x_1 \geq y_1$ est un préordre (large) total et n'est pas antisymétrique ; la relation $>_1$ définie par $x >_1 y \Leftrightarrow x_1 > y_1$ est un ordre strict, qui n'est pas total, mais est négativement transitif.

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $\geq_L$ définie par

$$x = (x_1,x_2) \geq_L y = (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ OU } [x_1 = y_1 \text{ET } x_2 \geq y_2]$$

est un ordre (large) total, appelé *ordre lexicographique*. La relation $>_L$ définie par $x >_L y \Leftrightarrow [x \geq_L y \text{ ET } x \neq y]$ est un ordre strict total.

2 Relations de préférence

En théorie de la décision, on s'intéresse à des relations d'ordre pour lesquelles on utilise une terminologie particulière.

2.1 Relations de préférence

On considère une relation binaire dans $\mathcal{X}$, que l'on note $\succsim$; $x \succsim y$ est lu "*x (est) préféré à y*".
A partir de cette première relation, on en définit deux autres, $\succ$ et $\sim$, par:

$$x \succ y \Leftrightarrow [x \succsim y \text{ ET NON } y \succsim x]$$

lue "*x (est) strictement préféré à y*" et

$$x \sim y \Leftrightarrow [x \succsim y \text{ ET } y \succsim x]$$

lue "*x et y (sont) indifférents*".
Autrement dit, $\succ$ est la *partie asymétrique* de la relation $\succsim$ et $\sim$ est sa *partie symétrique*.
On parle donc de la *relation de préférence (large)* $\succsim$, de la *relation de préférence stricte* $\succ$ et de la *relation d'indifférence* $\sim$.
On introduit aussi les *opposées*, $\precsim$ et $\prec$, des relations de préférence $\succsim$ et $\succ$:

$$x \precsim y \Leftrightarrow y \succsim x \quad \text{et} \quad x \prec y \Leftrightarrow y \succ x.$$

Ces relations coïncident parfois, mais pas toujours, avec, respectivement, les relations $\not\succ$ et $\not\succsim$, qui sont les *complémentaires* de $\succ$ et $\succsim$, définies par

$$x \not\succ y \Leftrightarrow \text{NON } x \succ y \quad \text{et} \quad x \not\succsim y \Leftrightarrow \text{NON } x \succsim y.$$

Proposition 1. *Lorsqu'une relation de préférence $\succsim$ dans $\mathcal{X}$ est un préordre, alors :*
i) l'indifférence $\sim$ est une relation d'équivalence (c-à-d réflexive, symétrique, transitive);
ii) la préférence stricte $\succ$ et son opposée $\prec$ sont des ordres stricts ;
iii) $\forall x, y \in \mathcal{X}$, au plus l'une des affirmations $x \succ y$, $y \succ x$ et $x \sim y$ est vraie ;
iv) $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \succsim y \Leftrightarrow [x \succ y$ OU $x \sim y]$.

Proposition 2. *Soit une relation de préférence $\succsim$ dans $\mathcal{X}$ qui est un préordre. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
i) la préférence $\succsim$ est complète, c-à-d est un préordre total ;
ii) la préférence stricte $\succ$ est un ordre strict négativement transitif ;
iii) $\forall x, y \in \mathcal{X}$, une et une seule des affirmations $x \succ y$, $y \succ x$ et $x \sim y$ est vraie ;
iv) $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \precsim y \Leftrightarrow x \not\succ y$;
v) $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \prec y \Leftrightarrow y \not\succsim x$.

La comparaison des *(iii)* des deux propositions précédentes montre que la relation $\sim^*$ définie par

$$x \sim^* y \Leftrightarrow [x \not\succ y \text{ ET } y \not\succ x]$$

ne coïncide avec $\sim$ que si $\succsim$ est un préordre total.
On doit donc l'interpréter dans le cas général comme une relation d'*indifférence-ou-incomparabilité*. La relation d'*incomparabilité*, INC, serait définie par

$$x \text{ INC } y \Leftrightarrow [x \not\succsim y \text{ ET } y \not\succsim x].$$

Dans le cas d'un préordre total - et seulement dans ce cas - la validité de *(iv)* et *(v)* autorise à lire $x \precsim y$ comme "*x (est) non strictement préféré à y*" et $x \prec y$ comme "*x (est) non préféré à y*".

2.2 Admissibilité

Les concepts suivants joueront un rôle important dans le cas d'une relation de préférence partielle.
Etant donné une relation binaire $\succsim$ dans un ensemble $\mathcal{X}$, $\succ$ sa partie asymétrique et un sous-ensemble $E \subseteq \mathcal{X}$:
On dit que $a \in E$ est *admissible* dans E lorsque $\{x \in E : x \succ a\} = \emptyset$. L'*ensemble des admissibles* dans E est donc

$$Adm(E) = \{a \in E : \nexists\, x \in E, x \succ a\}.$$

Cet ensemble peut être vide ; par exemple pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, la relation $\geq$ et $E = [0,1[$.

Deux admissibles sont indifférents-ou-incomparables : $a,b \in Adm(E) \Rightarrow x \sim^* y$; d'où, lorsque $\succsim$ est un préordre total et que $a \in Adm(E)$, alors $Adm(E) = \{x \in E : x \sim a\}$, classe d'indifférence de a.
On dit que $C \subseteq E$ est *complet* dans E lorsque

$$\forall x \in E \backslash C, \exists\, c \in C, c \succ x.$$

Un ensemble complet contient tous les admissibles, mais l'ensemble des admissibles n'est pas toujours complet (puisqu'il peut être vide) ; lorsqu'il est complet, il est le plus petit ensemble complet. On démontre facilement par récurrence le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit $\succsim$ une relation binaire sur un ensemble $\mathcal{X}$ et $\succ$ sa partie asymétrique.*
Si $\succ$ est acyclique, alors quel que soit $E \subseteq \mathcal{X}$, E ***fini*** *et $E \neq \emptyset$, l'ensemble de ses admissibles, $Adm(E)$, est non-vide ; si, de plus, $\succ$ est transitive, $Adm(E)$ est complet dans E.*

3 Révélation des préférences

Une relation de préférence n'est pas directement observable. Ce que l'on peut observer, ce sont les *choix* opérés par le décideur dans telle ou telle situation. La relation de préférence n'est donc qu'une construction hypothétique cherchant à expliquer les choix observés. C'est P. Samuelson qui a été à l'origine de cette vision des choses avec sa *théorie des préférences révélées* élaborée dans le cadre de l'étude du comportement du Consommateur en Economie.

3.1 Fonctions de choix

Notons $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = 2^{\mathcal{X}}$ l'ensemble des parties de l'ensemble de choix $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}^*(\mathcal{X}) = 2^{\mathcal{X}} \backslash \{\emptyset\}$ l'ensemble de ses parties non-vides.
Une *fonction de choix* est une application $Ch(.) : \mathcal{P}^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}^*(\mathcal{X})$ telle que $\forall A \in \mathcal{P}^*(\mathcal{X})$, $Ch(A) \subseteq A$.

N.B. (i) *pour qu'il existe une fonction de choix, il est nécessaire que le décideur accepte toujours de faire un choix, puisque la définition exige que* $\mid Ch(A) \mid \neq 0$;
(ii) *Lorsque* $\mid Ch(A) \mid > 1$, *il faut comprendre que $Ch(A)$ contient non seulement l'unique élément de A effectivement choisi par le décideur mais aussi tous les éléments qu'il aurait, selon ses dires, aussi bien pu choisir à sa place.*

Dans le cas où l'ensemble $\mathcal{X}$ est **fini**, on peut donner des hypothèses très simples sous lesquelles il existe une relation de préférence, qui est un préordre total, telle que, pour tout A, l'ensemble $Ch(A)$ choisi dans A n'est autre que l'ensemble des admissibles de A pour cette relation.

Commençons par un résultat préliminaire :

Proposition 4. *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble* ***fini****, $\succsim$ une relation binaire sur $\mathcal{X}$ et $\succ$ sa partie asymétrique. Soit $Adm(.)$ l'application $\mathcal{P}^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ définie par $A \mapsto Adm(A)$, ensemble des admissibles de A. Alors :*

$$Adm(.) \textit{ est une fonction de choix} \quad \Leftrightarrow \ \succ \textit{ est acyclique.}$$

A. Sen a introduit les deux hypothèses de comportement (α) et (β) suivantes :

Propriété (α) **de** Sen : $[x \in B \subseteq A \text{ ET } x \in Ch(A)] \Rightarrow x \in Ch(B)$.

Propriété (β) **de** Sen : $[x,y \in Ch(B) \text{ ET } B \subseteq A \text{ ET } y \in Ch(A)] \Rightarrow x \in Ch(A)$.

La propriété (α) traduit l'idée que nécessairement"le meilleur tailleur de la ville est également le meilleur tailleur de sa propre rue".
Cependant, une personne peut violer (α), par exemple en choisissant la viande dans un restaurant où le menu propose $B = \{viande, poisson\}$ et le poisson dans un autre où le menu est $A = \{viande, poisson, foie\ gras\}$, parce que la présence de foie gras sur la carte l'informe sur la qualité du restaurant et le rassure sur la fraîcheur du poisson.

La propriété (β) paraît raisonnable si le décideur est indifférent ente les éléments de $Ch(B)$, mais pas s'il y a des éléments qu'il juge incomparables : votre incapacité à trancher entre deux invitations, l'une au théâtre, l'autre au cinéma, peut se traduire par $Ch(\{théâtre, cinéma\}) = \{théâtre, cinéma\}$; dans le cas où vous sauriez de plus qu'au théâtre il y a un buffet gratuit à l'entracte, dont vous profiteriez avec plaisir, sans que cela soit décisif en faveur du théâtre, vous diriez que $Ch(\{théâtre, théâtre + buffet, cinéma\}) = \{théâtre + buffet, cinéma\}$.

Proposition 5. *Soit $\mathcal{X}$ un ensemble* ***fini****.*
i) Si $\succsim$ est un préordre total sur $\mathcal{X}$, la fonction $Adm(.)$ correspondante, définie par $E \mapsto Adm(E)$, ensemble des admissibles de E pour $\succsim$, est une fonction de choix satisfaisant (α) et (β) ;
ii) Inversement, si une fonction de choix $Ch(.)$ satisfait (α) et (β), il existe un préordre total $\succsim$ pour lequel $Adm(.) = Ch(.)$.

Démonstration : *i)* Quand $\succsim$ est un préordre total, $\succ$ est un ordre strict et est donc acyclique ; $Adm(.)$ est alors une fonction de choix d'après la Prop.4 ; (α) est vérifiée, car si x est admissible dans A, il est a fortiori admissible dans tout $B \subseteq A$; comme, pour tout E, $Adm(E)$ est une classe d'indifférence, $x,y \in Adm(B) \Rightarrow x \sim y$ et
$[y \in Adm(A) \text{ ET } x \sim y] \Rightarrow x \in Adm(A)$, ce qui prouve que (β) est également vérifié.

ii) Soit $Ch(.)$ une fonction de choix satisfaisant (α) et (β) ; définissons $\succsim$ par

(i) $\forall x \in \mathcal{X}$, $x \succsim x$ et (ii) $\forall x,y \in \mathcal{X}, x \neq y, x \succsim y \;\Leftrightarrow\; x \in Ch(\{x,y\})$

$\succsim$ est réflexive et comme $Ch(.)$ est une fonction de choix, $Ch(\{x,y\}) \neq \emptyset$, d'où l'on déduit que $\succsim$ est de plus complète.

Montrons qu'elle est aussi transitive ; pour x,y et z non tous distincts, la transitivité est évidente ; sinon, raisonnons par l'absurde et supposons que $\exists x,y,z$, tous distincts, tels que $x \in Ch(\{x,y\})$, $y \in Ch(\{y,z\})$ et $x \notin Ch(\{x,z\})$; d'où il résulte que $\{z\} = Ch(\{x,z\})$ et, par (α), que $x \notin Ch(\{x,y,z\})$; mais si $Ch(\{x,y,z\}) = \{y,z\}$ ou $Ch(\{x,y,z\}) = \{y\}$, alors, par (β), $Ch(\{x,y\}) = \{y\}$, contredisant $x \in Ch(\{x,y\})$; reste le cas où $Ch(\{x,y,z\}) = \{z\}$; mais, toujours par (β), $Ch(\{y,z\}) = \{z\}$, contredisant $y \in Ch(\{y,z\})$.

Notons que $\succ$, partie asymétrique de $\succsim$, est caractérisable par

$$\forall x,y \in \mathcal{X},\, x \succ y \;\Leftrightarrow\; x \neq y \text{ ET } \{x\} = Ch(\{x,y\})$$

Reste à vérifier que $Adm(.) = Ch(.)$. Si $[x \in A,\, x \notin Ch(A)]$, alors il existe $y \in Ch(A)$, $y \neq x$; comme $\{x,y\} \subseteq A$, il résulte de (β) que $Ch(\{x,y\}) = \{y\}$, c-à-d $y \succ x$ et donc $x \notin Adm(A)$. Réciproquement, si $[x \in A,\, x \notin Adm(A)]$, il existe $y \in Adm(A)$, tel que $y \succ x$, c-à-d $Ch(\{x,y\}) = \{y\}$; de $x \in \{x,y\} \subseteq A$ et $x \notin Ch(\{x,y\})$ il résulte alors, d'après (α), que $x \notin Ch(A)$.

4 Fonctions d'utilité

4.1 Problème de l'existence et de l'unicité des fonctions d'utilité

4.1.1 Existence

Définition 5. Soit une relation de préférence , $\succsim$, sur $\mathcal{X}$, qui est un préordre total. On dit qu'une application $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une *fonction d'utilité* représentant $\succsim$ lorsque

$$\forall x,y \in \mathcal{X},\, x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

On en déduit immédiatement une propriété équivalente, qui fait intervenir la partie asymétrique $\succ$ de $\succsim$:

$$\forall x,y \in \mathcal{X},\, x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$$

et une conséquence :

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\, x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$$

Les fonctions d'utilité sont des généralisations des fonctions strictement croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

N.B. *La définition précédente n'a de sens que pour un préordre total ; en effet l'équivalence $\Leftrightarrow$ crée un "isomorphisme d'ordre" entre les relations $\succsim$ (sur $\mathcal{X}$) et*

$\geq$ (sur $\mathbb{R}$) : la transitivité et complétude de l'un entraînent celles de l'autre.
Dans le cas d'un préordre partiel, on pourra éventuellement introduire une application u "strictement croissante" satisfaisant :
$\forall x, y \in \mathcal{X}, x \succ y \Rightarrow u(x) > u(y)$ ET $x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$.

Il n'existe pas toujours de fonction d'utilité, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4. Prenons le cas de l'ordre lexicographique $\geq_L$ dans $\mathbb{R}^2$ (cf. l'exemple 2):

$$x = (x_1,x_2) \geq_L y = (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ OU } [x_1 = y_1 \text{ET } x_2 \geq y_2]$$

Supposons qu'il existe une fonction d'utilité u. A tout nombre réel $r \in \mathbb{R}$, on peut alors associer l'intervalle $[u(r,0),u(r,1)]$ de $\mathbb{R}$ qui est non-dégénéré, puisque $(r,1) >_L (r,0) \quad \Rightarrow u(r,1) > u(r,0)$; ces intervalles sont deux à deux disjoints, puisque $r > r' \Rightarrow u(r,0) > u(r',1)$; par l'axiome du choix, on peut sélectionner dans chacun de ces intervalles un rationnel $q_r \in \mathbb{Q}$; nécessairement : $r \neq r' \Rightarrow q_r \neq q_{r'}$. On obtient ainsi une injection $r \mapsto q_r$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$, ce qui est impossible puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas (cf. la diagonale de CANTOR) : u ne peut exister.

On peut vérifier que l'ordre lexicographique ne satisfait pas la propriété générale suivante :
L'ensemble $\mathcal{X}$ muni du préordre total $\succsim$ est dit *parfaitement séparable* s'il existe un sous-ensemble, *fini ou dénombrable*, A de $\mathcal{X}$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\, x \succ y, \exists\, a \in A,\, x \succsim a \succsim y$$

C'est une propriété caractéristique de l'existence d'une fonction d'utilité :

Proposition 6. *Soit un ensemble $\mathcal{X}$ muni d'un préordre total $\succsim$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction d'utilité le représentant est qu'il soit parfaitement séparable.*

Démonstration :
Nécessité. Soit u une fonction d'utilité, $u(\mathcal{X}) \subseteq \mathbb{R}$ son image.
Considérons d'abord tous les couples $r,s \in u(\mathcal{X})$ tels que $r < s$ et que $]r,\, s[\, \cap\, u(\mathcal{X}) = \emptyset$. Ces intervalles $]r,\, s[$ étant deux à deux disjoints et non-dégénérés, il y en a au plus une infinité dénombrable (même preuve que dans l'exemple ci-dessus) ; formons alors un sous-ensemble B de $\mathcal{X}$ en sélectionnant un unique élément de $u^{-1}(r) \cup u^{-1}(s)$.

Considérons ensuite tous les couples $q,q' \in \mathbb{Q}$ tels que $q < q'$ et que $]q,\, q'[\, \cap\, u(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ et formons un sous-ensemble C de $\mathcal{X}$ en sélectionnant un unique élément $x_{q,q'} \in u^{-1}(]q,\, q'[)$; C est clairement au plus dénombrable.

Montrons que $A = B \cup C$, qui est alors lui-même au plus dénombrable, a la propriété cherchée. Soit $x, y \in \mathcal{X}$ tels que $x \succ y$ et donc que $u(y) < u(x)$.

Ou bien, $]u(y), u(x)[\cap u(\mathcal{X}) = \emptyset$ et B contient un élément b de $u^{-1}(u(y)) \cup u^{-1}(u(x))$, qui donc satisfait soit $b \sim y$, soit soit $b \sim x$.

Ou bien $]u(y), u(x)[\cap u(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ et il existe $z \in \mathcal{X}$ tel que $u(y) < u(z) < u(x)$ et donc aussi $q,q' \in \mathbb{Q}$ tels que $u(y) < q < u(z) < q' < u(x)$ d'où $u(y) < q < u(x_{q,q'}) < q' < u(x)$; $x_{q,q'} \in C \subseteq A$ et vérifie $x \succ x_{q,q'} \succ y$.

Suffisance. Supposons l'ensemble $\mathcal{X}$ parfaitement séparé par $A = \{a_i, i \in N\}$, où $N = \mathbb{N}$ si A est dénombrable et $N \subset \mathbb{N}$ si A est fini. La fonction u définie par :

$$x \mapsto u(x) = \sum_{\{i \in N : a_i \prec x\}} 1/2^i.$$

est une fonction d'utilité comme on le vérifie facilement.

4.1.2 Non-unicité des fonctions d'utilité

Dès qu'il existe une fonction d'utilité, il en existe une infinité ; plus précisément :

Proposition 7. *Soit $\succsim$ un préordre total représentable par la fonction d'utilité $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $v : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité représentant $\succsim$;
(ii) il existe une application strictement croissante $\varphi : u(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $v = \varphi \circ u$.

Démonstration :
$(ii) \Rightarrow (i)$ car, si $v = \varphi \circ u$ et φ est strictement croissante,

$$\forall x,y \in \mathcal{X},\ x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow v(x) = \varphi(u(x)) \geq \varphi(u(y)) = v(y) \ ;$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ car, si $u,v : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions d'utilité représentant $\succsim$, la fonction φ, définie par

$$\forall r \in u(\mathbb{R}),\ \varphi(r) = v(x), \text{ avec } x \in u^{-1}(r),$$

est strictement croissante puisque

$$[r,r' \in u(\mathbb{R}),\ r > r', u(x) = r,\ u(x') = r'] \Rightarrow x \succ x' \Rightarrow \varphi(r) = v(x) > v(x') = \varphi(r').$$

Exemple 5. Dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, la relation $\succsim$ définie par

$$x = (x_1,x_2) \succsim y = (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1.\ x_2 \geq y_1.\ y_2$$

a pour fonction d'utilité évidente $u(x) = x_1.\ x_2$, mais $v(x) = {x_1}^3.\ {x_2}^3$ et $w(x) = ln\ x_1 + ln\ x_2$ sont aussi des fonctions d'utilité, liées à u par $v = \varphi \circ u$, où $\varphi(r) = r^3$ et $w = \psi \circ u$, où $\psi(r) = ln\ r$.

4.1.3 Caractère ordinal des fonctions d'utilité

Il est commode de définir un préordre, comme dans l'exemple précédent, par une fonction d'utilité le représentant : fournir pour chaque x la valeur de $u(x)$ est plus simple que de déclarer vraie pour chaque couple (x,y) l'une des trois assertions $x \succ y$, $y \succ x$ ou $x \sim y$ mais il ne faut pas se laisser abuser par le caractère numérique de $u(x)$ et $u(y)$; en l'absence d'hypothèses supplémentaires, seul leur ordre relatif a une signification ; par exemple, pour tout triplet x,y,z tel que $u(x)-u(y) > u(y)-u(z) > 0$, on peut trouver une autre utilité v telle que $0 < v(x) - v(y) < v(y) - v(z)$; les écarts d'utilités n'ont donc en général pas de signification particulière.
L'ensemble composé d'une fonction sur $\mathcal{X}$ et de toutes celles en dérivant par transformation strictement croissante constitue, par définition, une famille "*ordinale*" : leur seul point commun est de définir le même préordre sur les éléments de $\mathcal{X}$.

4.1.4 Courbes d'indifférence

Lorsque $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$,une fonction d'utilité peut servir à décrire graphiquement le préordre qu'elle représente : aux classes d'indifférence du préordre $\succsim$ correspondent, en vertu de la propriété $x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$, les *courbes* ou *surfaces de niveau d'utilité* $u(x) = cte$.
Le tracé d'un certain nombre de ces courbes ou surfaces, complété par l'indication du niveau correspondant, donne souvent une idée assez précise des préférences.
Notons que le réseau des courbes d'indifférence est bien spécifique du préordre donné , c-à-d indépendant de la fonction d'utilité considérée ; si $v = \varphi \circ u$ est une autre fonction d'utilité, $\{x : u(x) = k\} = \{x : v(x) = k'\}$, pour $k' = \varphi(k)$.

4.2 Continuité des fonctions d'utilité

Chercher un élément maximum dans un ensemble $E \subseteq \mathcal{X}$ pour un préordre total $\succsim$ représentable par une fonction d'utilité u équivaut à maximiser u dans E. L'intérêt d'exprimer le problème sous cette forme est que les propriétés des fonctions numériques sont bien connues ; par exemple, le fait qu'une fonction continue atteigne un maximum sur tout compact permet de conclure à l'existence d'un élément maximum dans E, s'il existe une topologie sur $\mathcal{X}$ pour laquelle E est compact et u continue.
Ceci nous conduit à la question : étant donné un préordre total $\succsim$ sur un ensemble $\mathcal{X}$ et une topologie (identifiée à l'ensemble de ses ouverts) $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{X}$, existe-t-il une fonction d'utilité continue représentant ce préordre?
L'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ est supposé muni de la topologie naturelle, engendrable par les intervalles $]-\infty, r[$ et $]r, +\infty[$, $r \in \mathbb{R}$.

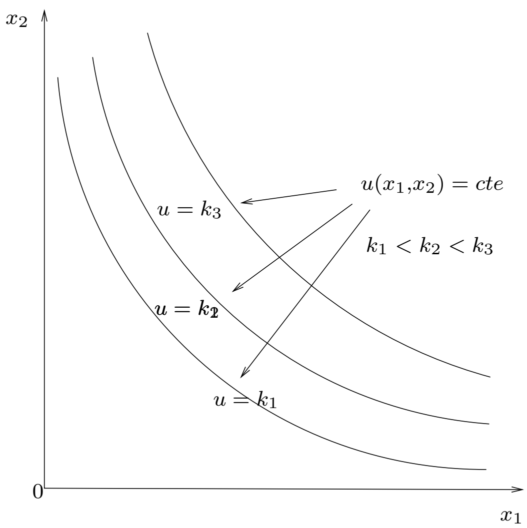

FIG. 1 – *courbes d'indifférence*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'utilité u soit continue est alors que
$u^{-1}(]-\infty, r[) \in \mathcal{T}$ et $u^{-1}(]r, +\infty[) \in \mathcal{T}$, pour tout $r \in \mathbb{R}$.
Lorsque $r \in u(\mathcal{X})$, c-à-d, $r = u(x)$ pour au moins un $x \in \mathcal{X}$, $u^{-1}(]-\infty, r[) = \{y \in \mathcal{X} \ : \ y \prec x\}$ et $u^{-1}(]r, +\infty[) = \{y \in \mathcal{X} \ : \ y \succ x\}$. Aucune fonction d'utilité ne peut donc être continue dans une topologie qui ne contiendrait pas tous ces ensembles.
On appelle *topologie du préordre total* $\succsim$ la topologie $\mathcal{T}_\circ$ sur $\mathcal{X}$ engendrée par $\mathcal{X}$ et les "*intervalles d'ordre*" du type $\{y \in \mathcal{X} \ : \ y \prec x\}$ ou $\{y \in \mathcal{X} \ : \ y \succ x\}$, $x \in \mathcal{X}$. Toute topologie $\mathcal{T}$ contenant ces intervalles d'ordre contient tous les ouverts de $\mathcal{T}_\circ$ et est dite *plus fine que* $\mathcal{T}_\circ$.
On peut donc énoncer :
Proposition 8. *Soit $\succsim$ un préordre total sur un ensemble $\mathcal{X}$ muni d'une topologie $\mathcal{T}$. Une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction d'utilité continue le représentant est que la topologie $\mathcal{T}$ soit plus fine que la topologie $\mathcal{T}_\circ$ du préordre.*

Une fonction d'utilité qui est continue dans la topologie $\mathcal{T}_\circ$ du préordre l'est *a fortiori* dans toute topologie plus fine. Les discontinuités, dans $\mathcal{T}_\circ$ comme dans toute topologie plus fine, ne peuvent donc provenir que de ce que, pour certains $r \notin u(\mathcal{X})$,soit $u^{-1}(]-\infty, r[) \notin \mathcal{T}_\circ$, soit $u^{-1}(]r, +\infty[) \notin \mathcal{T}_\circ$.

Exemple 6. Prenons $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, et pour $\succsim$ la relation $\geq$. Une application $u \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est alors une fonction d'utilité si et seulement si $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \geq y$. Les fonctions d'utilité sont donc toutes les applications strictement

croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour la topologie de l'ordre, qui est la topologie naturelle de $\mathbb{R}$, la continuité est la continuité au sens courant pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Certaines fonctions d'utilité sont donc continues comme $Id\ :\ x \mapsto Id(x) = x$ ou comme $v\ :\ x \mapsto v(x) = x^3$ et d'autres ne le sont pas ; par exemple,

$$u(x) = x, \text{ pour } x < 0; u(x) = 1 + x, \text{ pour } x \geq 0,$$

n'est pas continue puisque $u^{-1}(]1/2, +\infty[) = \{y \in \mathcal{X}\ :\ u(y) > 1/2\} = \{y \in \mathcal{X}\ :\ y \geq 0\}$, ensemble qui n'est pas un ouvert mais un fermé.
$\mathcal{X}$ est parfaitement séparé par $A = \mathbb{Q}$. On peut noter que la fonction (cf. Prop.6)

$$x \mapsto u(x) = \sum_{\{i \in \mathbb{Q} : a_i \prec x\}} 1/2^i$$

est une fonction d'utilité mais n'est pas continue puisqu'elle fait un saut en chaque rationnel.

En fait, G. Debreu a montré que, dès qu'il existe une fonction d'utilité, il en existe une qui est continue dans la topologie du préordre, ce qui conduit à l'énoncé suivant :

Proposition 9. *Soit un ensemble $\mathcal{X}$ muni d'un préordre total $\succsim$; soit $\mathcal{T}_\circ$ la topologie du préordre. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathcal{X}$, muni de $\succsim$, est parfaitement séparable ;
(ii) il existe une fonction d'utilité représentant $\succsim$;
(iii) il existe une fonction d'utilité représentant $\succsim$, continue dans la topologie $\mathcal{T}_\circ$.

Démonstration
Il reste seulement à montrer que $(i) \Rightarrow (iii)$.
1. Modifions d'abord l'ensemble A en ajoutant et retranchant des éléments de façon qu'il reste dénombrable, sépare parfaitement $\mathcal{X}$, que
$\forall x,y \in \mathcal{X}$, $[\ x \succ y$ et $\{z \in \mathcal{X}, x \succ z \succ y\} = \emptyset\ ] \Rightarrow \exists a,b \in A$, $a \sim x$, $b \sim y$
et qu'il ne contienne pas d'éléments indifférents les uns aux autres.

2. On construit alors sur la restriction de $\succsim$ à A, qui est alors un ordre total, une fonction d'utilité f à valeur dans $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ (les rationnels de $]0,1[$) par la procédure suivante, connue sous le nom de *règle de Cantor*:
On choisit des ordres d'énumération pour A et $\mathbb{Q} \cap]0,1[$; $A = \{a_i,\ i \in I\}$, où soit $I = \mathbb{N}$, soit I est formé des $\mid A \mid$ premiers entiers ; $\mathbb{Q} \cap]0,1[= \{q_j,\ j \in J\}$, où $J = \mathbb{N}$.
On prend $f(a_0) = q_0$ puis, applique récursivement, à partir de $n = 1$, la règle "prendre pour $f(a_n)$ le premier rationnel énuméré qui est classé par $\geq$ par rapport à $f(a_0), \cdots ,f(a_{n-1})$ de la même façon que a_n est classé par $\succsim$ par rapport à $a_0, \cdots , a_{n-1}$."

Il est immédiat que f est bien une fonction d'utilité sur A et que $f(A)$ a des bornes dans $[0,1]$; elle possède de plus la propriété suivante :
$[\ q \in \mathbb{Q} \cap\ ]\inf f(A), \sup f(A)[,\ q \notin f(A)\ ] \ \ \Rightarrow$
$$[\ \exists q', q'' \in f(A),\ q' < q < q'' \ \text{ ET } \ f(A) \cap\ ]q',q''[\ = \ \emptyset\ ]$$
Ceci se montre ainsi :
Soit $q \in \mathbb{Q} \cap\ ]\inf f(A), \sup f(A)[$; soit j_0 le plus petit indice pour lequel $\{q_0, \cdots ,q_{j_0}\}$ contient à la fois q et des éléments $p_1,p_2 \in f(A)$ tels que $p_1 < q < p_2$; soit q' le plus grand élément de $\{q_0, \cdots ,q_{j_0}\} \cap f(A)$ qui est plus petit que q et soit q'' le plus petit élément de $\{q_0, \cdots ,q_{j_0}\} \cap f(A)$ qui est plus grand que q.
Comme $q',q'' \in f(A)$, il existe $b',b'' \in A$ tels que $q' = f(b')$ et $q'' = f(b'')$.
Si $f(A) \cap\ ]q',q''[\ \neq\ \emptyset$, alors $A \cap\ ]b',b''[\ \neq\ \emptyset$ également ; dans ce cas q est l'image par f du premier élément énuméré de $A \cap\ ]b',b''[$. Si $q \notin f(A)$, c'est donc que $f(A) \cap\ ]q',q''[\ = \ \emptyset$.

3. On définit alors une extension u de f à $\mathcal{X}$ par

$$x \mapsto u(x) = \sup_{\{a \in A : a \precsim x\}} f(a).$$

On vérifie facilement que u est une fonction d'utilité. Pour qu'elle soit continue, il suffit que $u^{-1}(]-\infty,\ q[) \in \mathcal{T}$ et $u^{-1}(]q, +\infty[) \in \mathcal{T}$, pour tout $q \in \mathbb{Q}$ (cela suffit, car ces ensembles forment une sous-base de la topologie naturelle de $\mathbb{R}$).
$u^{-1}(]-\infty,\ q[) = \emptyset \in \mathcal{T}$ si $q \leq inf f(A)$; $u^{-1}(]-\infty,\ q[) = \mathcal{X} \in \mathcal{T}$, si $q > inf f(A)$ ou $q = sup f(A)$ et $q \notin f(A)$; $u^{-1}(]-\infty,\ q[) = \{x \in \mathcal{X} : x \prec f^{-1}(q)\} \in \mathcal{T}$ si $q \in f(A)$.
Reste le cas $q \in \mathbb{Q} \cap\ ]\inf f(A), \sup f(A)[$ et $q \notin f(A)$; d'après le (2), il existe $b'' \in A$ tel que $u^{-1}(]-\infty,\ q[) = \{x \in \mathcal{X} : x \prec b''\} \in \mathcal{T}$.

La démonstration de ce que $u^{-1}(]q, +\infty[) \in \mathcal{T}$ est analogue.