M2 IAD UE MODE
Notes de cours (3)

Jean-Yves Jaffray Patrice Perny

16 mars 2006

ATTITUDE PAR RAPPORT AU RISQUE

1 Attitude par rapport au risque

Nousn'avons pas encore fait d'hypothèse sur la structure de l'ensemble des résultats $\mathcal{C}$; nous supposerons dorénavant que c'est un *intervalle, borné ou non, de* $\mathbb{R}$, comme dans les exemples où les résultats sont des sommes d'argent ; cependant certaines des définitions et propositions qui suivent peuvent se généraliser au cas où $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.
on note toujours $\mathcal{P}$ l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathcal{C}$; lorsqu'une loi P de $\mathcal{P}$ possède une espérance mathématique, on la désigne par $E(P)$; $E(P) \in \mathcal{C}$ et $\delta_{E(P)}$ est la loi certaine en $E(P)$.

1.1 Attitude globale vis-à-vis du risque

Définition 1. On dit qu'un D. est *adversaire du risque* lorsque, pour toute loi de probabilité de P possédant une espérance, il préfère être certain d'obtenir le résultat $E(P)$ plutôt que d'obtenir un résultat aléatoire de loi P :

$$\delta_{E(P)} \succsim P \ ;$$

on dit qu'il est *joueur* s'il manifeste les préférences opposées,

$$\forall P, P \succsim \delta_{E(P)} \ ;$$

il est dit *neutre vis-à-vis du risque* si

$$\forall P, P \sim \delta_{E(P)} \, .$$

On peut remarquer que cette définition est *intrinsèque*, en ce sens qu'elle n'est pas liée à un modèle : le D. peut très bien avoir un critère autre qu'une utilité espérée.

Dans le cadre du modèle EU, un D. sera donc :

- adversaire du risque lorsque $\forall P, u(E(P)) \geq U(P)$;
- joueur lorsque $\forall P, u(E(P)) \leq U(P)$; et
- neutre vis-à-vis du risque $\forall P, u(E(P)) = U(P)$.

Il existe alors une caractérisation simple de l'attitude vis-à-vis du risque :

Proposition 1. *Soit un D. ayant pour critère EU avec utilité de vNM u.*
D. est adversaire du risque $\Leftrightarrow$ u est concave ;
D. est joueur $\Leftrightarrow$ u est convexe ;
D. est neutre vis-à-vis du risque $\Leftrightarrow$ u est affine.

Démonstration
(i) u concave $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in \mathcal{C}$, $u(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \geq \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y)$.
Soit donc $x,y \in \mathcal{C}$ et P la loi donnant x et y avec équiprobabilité :
$P(\{x\}) = P(\{y\}) = \frac{1}{2}$; $E(P) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.
si D. est adversaire du risque, $\delta_{E(P)} \succsim P$ et donc $U(\delta_{E(P)}) \geq U(P)$; or, $U(\delta_{E(P)}) = u(E(P)) = u(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$ et $U(P) = \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y)$; u est bien concave (cf la fig.2 plus bas).
(ii) Réciproquement, supposons u concave et soit P une loi possédant une espérance $E(P)$. Par le point $(E(P),u(E(P)))$ de la courbe représentant la fonction $z = u(x)$ il passe une *droite d'appui* (c'est la tangente à la courbe si $u'(E(P))$ existe ; n'importe quelle droite de pente comprise entre celle des deux demi-tangentes, qui existent toujours pour u concave, sinon), c-à-d une droite entièrement située au-dessus de cette courbe :

$$\forall x \in \mathcal{C}, [\, z - u(E(P)) = a.[x - E(P)]\, ; \, u'_-(E(P)) \geq a \geq u'_+(E(P))] \Rightarrow z \geq u(x).$$

Il en résulte que

$$\forall x \in \mathcal{C},\ u(x) - u(E(P)) \leq a.[x - E(P)],$$

d'où en intégrant,

$$U(P) - u(E(P)) = \int_{\mathcal{C}} u(x)dP - u(E(P)) \leq \int_{\mathcal{C}} xdP - E(P) = E(P) - E(P) = 0$$

et donc $\delta_{E(P)} \succsim P$.

(iii) La preuve de l'équivalence, dans le modèle, entre être joueur et avoir une utilité de vNM convexe est analogue ; enfin être neutre vis-à-vis du risque, c'est être à la fois joueur et adversaire du risque, ce qui équivaut à avoir une utilité de vNM à la fois convexe et concave, c-à-d affine.

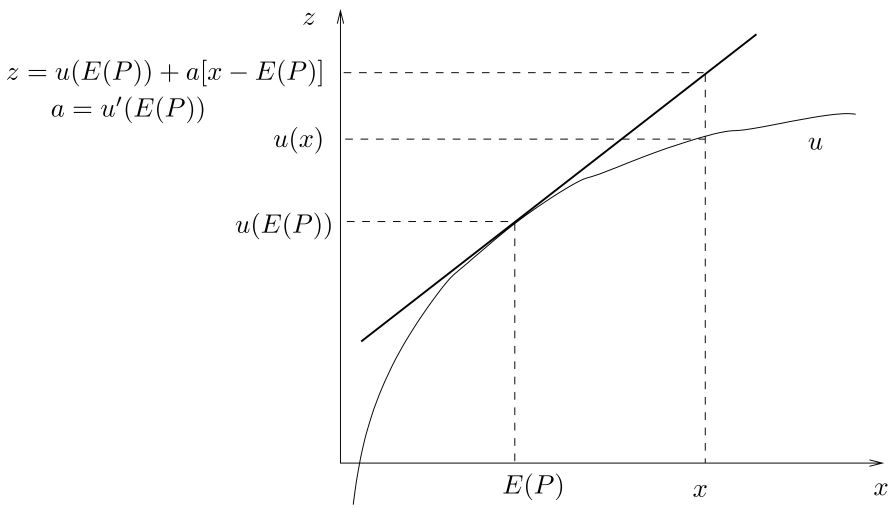

FIG. 1 – *Adversaire du risque : utilité de vNM concave*

Notation : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$; lorsque la loi de probabilité qu'elle engendre sur $\mathcal{C}$ sera une loi P on aura donc $E(X) = E(P)$.
D'autre part, on écrira abusivement $U(X)$ pour la valeur de l'utilité linéaire $U(P)$ apportée par sa loi.

On appelle *équivalent-certain* d'une v.a. X, en abrégé $EC(X)$, un résultat tel que le D. soit indifférent entre la perspective aléatoire X et l'obtention de ce résultat avec certitude ; cette définition est intrinsèque ; dans le modèle EU, l'équivalent-certain de X est est caractérisé par la relation :

$$u(EC(X)) = U(X)\,[= U(P)].$$

Il suffit que u soit continue pour que cette équation ait une solution et donc que $EC(X)$ existe ; il sera unique si u est strictement croissante.

On appelle *prime de risque* (associée à la v.a. X) l'écart $\pi(X) = E(X) - EC(X)$; c'est la quantité (algébrique) que le D. est prêt à perdre en moyenne pour éliminer l'incertitude présentée par X.

Dans la partie (*ii*) de la proposition ci-dessus, nous avons établi la propriété suivante (théorème de JENSEN) ;

$$u \text{ concave} \Leftrightarrow \ \forall P, u(E(P)) \geq \int u dP$$

Elle entraine que, dans le cadre du modèle EU, un D. est :
- adversaire du risque $\Leftrightarrow$ $\forall X$, la prime de risque $\pi(X)$ est positive ;
- joueur $\Leftrightarrow$ $\forall X$, la prime de risque $\pi(X)$ est négative ; et
- neutre vis-à-vis du risque $\Leftrightarrow$ $\forall X$, la prime de risque $\pi(X)$ est nulle.

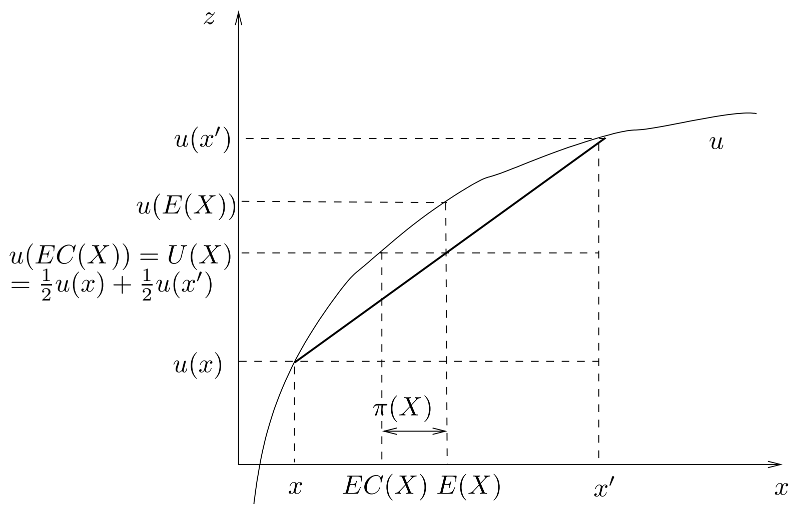

FIG. 2 – *Prime de risque d'un adversaire du risque pour* $X = \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_{x'}$

L'existence de compagnies d'assurances est la preuve que les adversaires du risque sont nombreux. Voyons pourquoi.
Supposons pour simplifier que chaque assuré potentiel i n'encourt qu'un seul risque : perdre une somme c_i avec une probabilité p_i ; s'il ne s'assure pas, il est devant une perspective X_i d'espérance $E(X_i) = -p_i c_i \,(< 0)$ ($-E(X_i)\,(> 0)$ est la *valeur actuarielle* de ce risque), ayant un équivalent certain $EC(X_i)\,(< 0)$; s'il est adversaire du risque, $\pi(X_i) = E(X_i) - EC(X_i) > 0$.
S'il s'assure en payant une *prime d'assurance* S_i à l'assureur, il sera devant la perspective non risquée $\delta_{(-S_i)}$; il est donc prêt à s'assurer en payant jusqu'à S_i tel que $u(-S_i) = u(EC(X_i))$, c-à-d $S_i = -EC(X_i) = -E(X_i) + \pi(X_i)$; *la prime d'assurance (maximum) est la somme de la valeur actuarielle et de la prime de risque.*
L'assureur perçoit les primes mais prend en charge tous les aléas et fait donc un profit aléatoire, $\sum_i [X_i + S_i] = \sum_i [X_i - E(X_i) + \pi(X_i)]$, d'espérance, $\sum_i \pi(X_i)$, positive ; si les risques individuels sont indépendants, la loi des grands nombres lui donne une forte probabilité de gagner de l'argent.

1.2 Attitude locale vis-à-vis du risque

1.2.1 Attitude locale vis-à-vis du risque absolu

Nous allons étudier les comportements face à de “petits risques”, c-à-d à des aléas de faible amplitude par rapport à leur espérance mathématique.

Supposons que le D. a une utilité de vNM, u, de dérivée première u' et seconde u''. Soit $\{X_h\}$ une famille de v.a. de supports $[m - h, m + h]$, de

lois P_h de même espérance $E(X_h) = m$ et de variances $Var(X_h)$ (noter que $Var(X_h) \leq h^2 \to 0$ quand $h \to 0$).
Par définition, $U(X_h) = u(EC(X_h))$.
Un développement limité au deuxième ordre de u au voisinage de m s'écrit

$$u(x) = u(m) + (x - m).u'(m) + \tfrac{1}{2}(x - m)^2.[u''(m) + \epsilon(x - m)],$$

ce qui , en intégrant sur l'intervalle $[m - h, m + h]$, donne

$$U(X_h) = \int_{m-h}^{m+h} u(x)dP_h = u(m) + (m - m)u'(m) + \tfrac{1}{2}Var(X_h)[u''(m) + \epsilon(h)].$$

Un développement au premier ordre de u au voisinage de m montre par ailleurs que :

$$u(EC(X_h)) = u(m) + (EC(X_h) - m).[u'(m) + \epsilon(EC(X_h) - m)].$$

On en déduit (sous certaines hypothèses techniques sur u'') que

$$\pi(X_h)u'(m) = -(EC(X_h) - m).u'(m) = -\tfrac{1}{2}Var(X_h).u''(m) + o(h)\,;$$

d'où, pour h infiniment petit,

$$\pi(X_h) \sim -\tfrac{1}{2}\tfrac{u''(m)}{u'(m)}Var(X_h).$$

Pour de petits risques X, la prime de risque est donc proportionnelle d'une part à la variance du risque, $Var(X)$, et d'autre part à une caractéristique locale du comportement du D., son *coefficient (local) d'aversion au risque absolu*, qui en x vaut

$$R_a(x) = -\tfrac{u''(x)}{u'(x)}.$$

1.2.2 Attitude locale vis-à-vis du risque relatif

On peut penser que le fait qu'un risque doive être considéré comme petit ou non dépend de la richesse du D.
Soit alors $\{Z_h\}$ une famille de v.a. de supports $[1 - h, 1 + h]$, de lois P_h de même espérance $E(Z_h) = 1$ et de variances $Var(Z_h)$.
On s'intéresse aux v.a.$X_h = m.Z_h$, qui ont donc la même espérance $E(X_h) = m.E(Z_h) = m > 0$ et des variances $Var(X_h) = m^2.Var(Z_h)$; $Var(Z_h) = \frac{Var(X_h)}{[E(X_h)]^2}$ est la *variance relative* de X_h et $\to 0$ quand $h \to 0$; les X_h correspondent donc à des aléas de faible amplitude relative.
Les mêmes calculs que précédemment montrent que, pour h infiniment petit,

$$\pi(X_h) \sim -\tfrac{1}{2}\tfrac{u''(m)}{u'(m)}m^2.Var(Z_h)$$

soit encore :

$$\tfrac{1}{m}\pi(X_h) \sim -\tfrac{1}{2}\tfrac{u''(m)}{u'(m)}m.Var(Z_h).$$

Pour de petits risques relatifs X (≥ 0) , la *prime de risque relative* $\frac{1}{E(X)}\pi(X)$ est donc proportionnelle d'une part à la variance relative de ce risque, $\frac{Var(X)}{[E(X)]^2}$ et d'autre part à une caractéristique locale du comportement du D., son *coefficient (local) d'aversion au risque relatif*, qui en x vaut

$$R_r(x) = -x\tfrac{u''(x)}{u'(x)}.$$

1.2.3 Exemples

$u(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; R_a(x) = \frac{1}{x}\,, R_r(x) = 1\,;$

$u(x) = k - \frac{1}{x^\gamma}\,(\gamma > 0) \;\Rightarrow\; R_a(x) = \frac{\gamma+1}{x}\,, R_r(x) = \gamma + 1\,;$

$u(x) = x^\gamma\,(0 < \gamma < 1) \;\Rightarrow\; R_a(x) = \frac{\gamma-1}{x}\,, R_r(x) = \gamma - 1\,;$

$u(x) = -x^2 + \beta x \;\Rightarrow\; R_a(x) = \frac{2}{\beta-2x}\,, R_r(x) = \frac{2x}{\beta-2x}.$

Les trois premières fonctions d'utilité correspondent à des coefficients locaux d'aversion au risque absolu décroissants et à des coefficients locaux d'aversion au risque relatif constants, ce qui paraît assez réaliste ; ce n'est pas le cas de l'utilité quadratique, où les deux sont croissants.