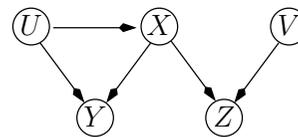


Examen de rattrapage du module MGDE

Durée : 3 heures

*Seuls documents autorisés :**Aucun document***Exercice 1 (5 points)**

La loi jointe $p(u, x, v, y, z)$ des 5 v.a. (U, X, V, Y, Z) admet le graphe d'indépendance G de la figure ci-dessous :



Q 1.1 L'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été $UXVYZ$;

Comment $p(u, x, v, y, z)$ se décompose-t-elle ?

Quelles sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui ont servi à construire le graphe ?

Q 1.2 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$$V \perp\!\!\!\perp (X, Y) ? \quad U \perp\!\!\!\perp (V, X) ? \quad U \perp\!\!\!\perp V \mid (Y, Z) ?$$

$$U \perp\!\!\!\perp V \mid (X, Y) ? \quad U \perp\!\!\!\perp V \mid (X, Y, Z) ?$$

Exercice 2 (5 points)

Soit \succsim une relation de préférence sur $A \times B \times C \times D \times E \times F \times G \times H \times I \times J$ représentable par la fonction d'utilité :

$$u_1(A, B) + u_2(E, G) + u_3(B, C) + u_4(A, C) + u_5(C, D, E, F) + u_6(G, H) + u_7(G, I) + u_8(B, D, J).$$

Q 2.1 Construisez l'arbre GAI obtenu grâce à la séquence d'élimination $A, H, I, G, J, E, F, B, C$. Vous indiquerez à côté de chacune des cliques les utilités stockées dans celles-ci.

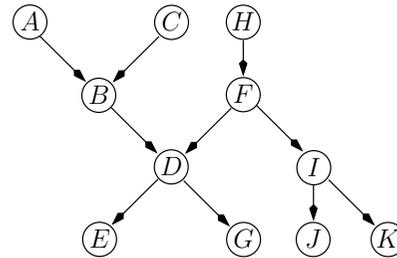
Q 2.2 Supposons que le couple (B, D) soit instancié à (b^0, d^0) . Quelles simplifications peut-on apporter au réseau GAI à partir de cette information ? Vous dessinerez le réseau simplifié et, là encore, vous indiquerez à côté de chacune des cliques les utilités stockées dans celles-ci.

Q 2.3 On recherche l'élément X préféré sur l'hyperplan $(B, D) = (b^0, d^0)$. Indiquez sur le réseau GAI de la question Q 2.2 le contenu des messages que vous faites transiter pour obtenir X .

Q 2.4 On rajoute à $(B, D) = (b^0, d^0)$ la contrainte supplémentaire $J = j^0$. Quelles modifications doit-on apporter aux messages de la question précédente pour obtenir l'élément préféré vérifiant ces contraintes ?

Exercice 3 (5 points)

Soit le réseau bayésien ci-dessous :



Q 3.1 Moralisez ce réseau.

Q 3.2 Triangulez le graphe moral en utilisant la séquence d'élimination suivante : $A, K, I, J, G, D, B, F, E$. Vous indiquerez pour chaque nœud éliminé le graphe non orienté obtenu après élimination.

Q 3.3 Dessinez un arbre de jonction correspondant à cette séquence d'élimination et indiquez à côté des cliques les probabilités conditionnelles que vous stockerez dans ces cliques.

Q 3.4 Indiquez les contenus des messages transitant dans les deux sens des arêtes sur chaque séparateur pour le calcul des probabilités *a priori* par l'algorithme de Shafer-Shenoy.

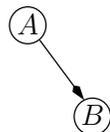
Q 3.5 Dans un arbre de jonction, pour tout couple de cliques voisines C_i et C_j d'intersection S_{ij} , les variables de $C_i \setminus S_{ij}$ sont indépendantes de $C_j \setminus S_{ij}$ conditionnellement à S_{ij} .

S_{ij} sépare l'arbre de jonction en deux sous-arbres T_1 et T_2 . Montrez que les variables de $T_1 \setminus S_{ij}$ sont indépendantes de $T_2 \setminus S_{ij}$ conditionnellement à S_{ij} .

Q 3.6 En utilisant la d -séparation, montrez que la propagation d'une information e_A concernant A dans l'arbre de jonction obtenu dans la question Q 3.4 ne nécessite le calcul que de deux nouveaux messages.

Exercice 4 (5 points)

Soit le réseau bayésien et la base de données (de taille 8) :



A	1	0	0	1	?	?	1	1
B	0	0	1	?	1	?	1	0

où

les '?' représentent des valeurs manquantes.

Q 4.1 Quels sont les paramètres du réseau bayésien ?

Q 4.2 Calculer les paramètres de ce réseau bayésien pour la base de données obtenues en retirant les lignes où il existe au moins une valeur manquante.

Q 4.3 Calculer, avec ces paramètres, la distribution de $P(A \mid B = 1)$. Était-il possible de calculer cette distribution directement dans la base ?

Q 4.4 Appliquer l'algorithme EM pour apprendre les paramètres de ce réseau avec la base entière (faire au plus 3 itérations de l'algorithme si la convergence n'est pas atteinte.).