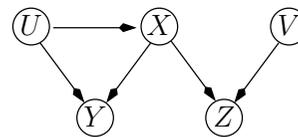


**Examen de rattrapage du module MGDE**

Durée : 3 heures

*Seuls documents autorisés :**Aucun document***Exercice 1 (5 points)**

La loi jointe  $p(u, x, v, y, z)$  des 5 v.a.  $(U, X, V, Y, Z)$  admet le graphe d'indépendance  $G$  de la figure ci-dessous :



**Q 1.1** L'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été  $UXVYZ$  ;

Comment  $p(u, x, v, y, z)$  se décompose-t-elle ?

Quelles sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui ont servi à construire le graphe ?

**Q 1.2** Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$$V \perp\!\!\!\perp (X, Y) ? \quad U \perp\!\!\!\perp (V, X) ? \quad U \perp\!\!\!\perp V \mid (Y, Z) ?$$

$$U \perp\!\!\!\perp V \mid (X, Y)? \quad U \perp\!\!\!\perp V \mid (X, Y, Z)?$$

---

## Exercice 2 (5 points)

---

Soit  $\succsim$  une relation de préférence sur  $A \times B \times C \times D \times E \times F \times G \times H \times I \times J$  représentable par la fonction d'utilité :

$$u_1(A, B) + u_2(E, G) + u_3(B, C) + u_4(A, C) + u_5(C, D, E, F) + u_6(G, H) + u_7(G, I) + u_8(B, D, J).$$

**Q 2.1** Construisez l'arbre GAI obtenu grâce à la séquence d'élimination  $A, H, I, G, J, E, F, B, C$ . Vous indiquerez à côté de chacune des cliques les utilités stockées dans celles-ci.

**Q 2.2** Supposons que le couple  $(B, D)$  soit instancié à  $(b^0, d^0)$ . Quelles simplifications peut-on apporter au réseau GAI à partir de cette information ? Vous dessinerez le réseau simplifié et, là encore, vous indiquerez à côté de chacune des cliques les utilités stockées dans celles-ci.

**Q 2.3** On recherche l'élément  $X$  préféré sur l'hyperplan  $(B, D) = (b^0, d^0)$ . Indiquez sur le réseau GAI de la question Q 2.2 le contenu des messages que vous faites transiter pour obtenir  $X$ .

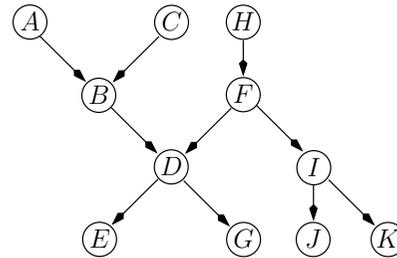
**Q 2.4** On rajoute à  $(B, D) = (b^0, d^0)$  la contrainte supplémentaire  $J = j^0$ . Quelles modifications doit-on apporter aux messages de la question précédente pour obtenir l'élément préféré vérifiant ces contraintes ?

---

**Exercice 3 (5 points)**

---

Soit le réseau bayésien ci-dessous :



**Q 3.1** Moralisez ce réseau.

**Q 3.2** Triangulez le graphe moral en utilisant la séquence d'élimination suivante :  $A, K, I, J, G, D, B, F, E$ . Vous indiquerez pour chaque nœud éliminé le graphe non orienté obtenu après élimination.

**Q 3.3** Dessinez un arbre de jonction correspondant à cette séquence d'élimination et indiquez à côté des cliques les probabilités conditionnelles que vous stockerez dans ces cliques.

**Q 3.4** Indiquez les contenus des messages transitant dans les deux sens des arêtes sur chaque séparateur pour le calcul des probabilités *a priori* par l'algorithme de Shafer-Shenoy.

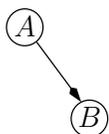
**Q 3.5** Dans un arbre de jonction, pour tout couple de cliques voisines  $C_i$  et  $C_j$  d'intersection  $S_{ij}$ , les variables de  $C_i \setminus S_{ij}$  sont indépendantes de  $C_j \setminus S_{ij}$  conditionnellement à  $S_{ij}$ .

$S_{ij}$  sépare l'arbre de jonction en deux sous-arbres  $T_1$  et  $T_2$ . Montrez que les variables de  $T_1 \setminus S_{ij}$  sont indépendantes de  $T_2 \setminus S_{ij}$  conditionnellement à  $S_{ij}$ .

**Q 3.6** En utilisant la  $d$ -séparation, montrez que la propagation d'une information  $e_A$  concernant  $A$  dans l'arbre de jonction obtenu dans la question Q 3.4 ne nécessite le calcul que de deux nouveaux messages.

### Exercice 4 (5 points)

Soit le réseau bayésien et la base de données (de taille 8) :



$A$	1	0	0	1	?	?	1	1
$B$	0	0	1	?	1	?	1	0

où

les '?' représentent des valeurs manquantes.

**Q 4.1** Quels sont les paramètres du réseau bayésien ?

**Q 4.2** Calculer les paramètres de ce réseau bayésien pour la base de données obtenues en retirant les lignes où il existe au moins une valeur manquante.

**Q 4.3** Calculer, avec ces paramètres, la distribution de  $P(A \mid B = 1)$ . Était-il possible de calculer cette distribution directement dans la base ?

**Q 4.4** Appliquer l'algorithme EM pour apprendre les paramètres de ce réseau avec la base entière (faire au plus 3 itérations de l'algorithme si la convergence n'est pas atteinte.).