# Examen du module MGDE

Durée : 1 heure 30

*Seuls documents autorisés :*
*les transparents de cours et les calculatrices*

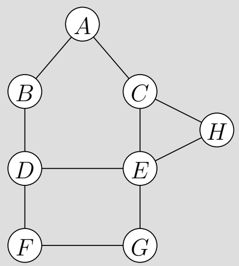
## Exercice 1 (3 points) — *Réseaux GAI*

Soit la fonction d'utilité définie sur l'espace $\mathcal{X} = A \times B \times C \times D \times E \times F \times G \times H$ par :

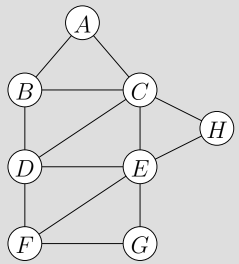
$$u_1(A,B)+u_2(A,C)+u_3(B,D)+u_4(C,E,H)+u_5(D,E)+u_6(D,F)+u_7(E,G)+u_8(F,G).$$

Dessinez un réseau GAI représentant cette utilité. Vous indiquerez dans quelles cliques vous stockeriez les sous-utilités $u_i$.

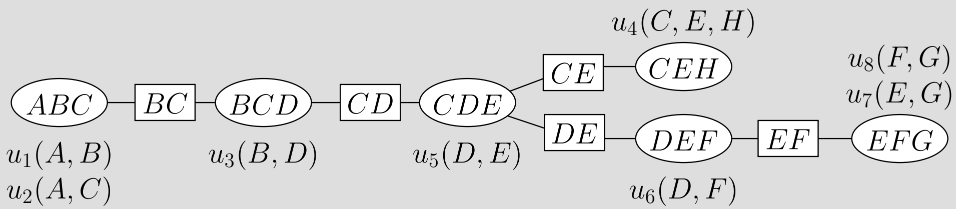
Le graphe markovien correspondant à l'utilité sur $\mathcal{X}$ est :



Le graphe n'étant pas triangulé, il faut le trianguler :

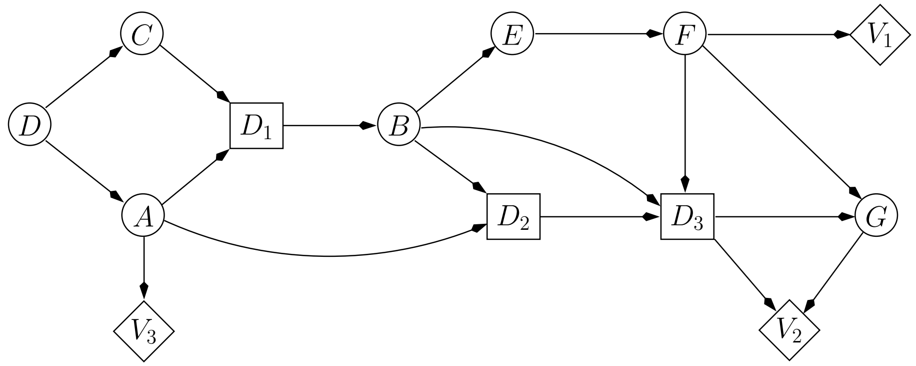



On obtient donc le réseau GAI :

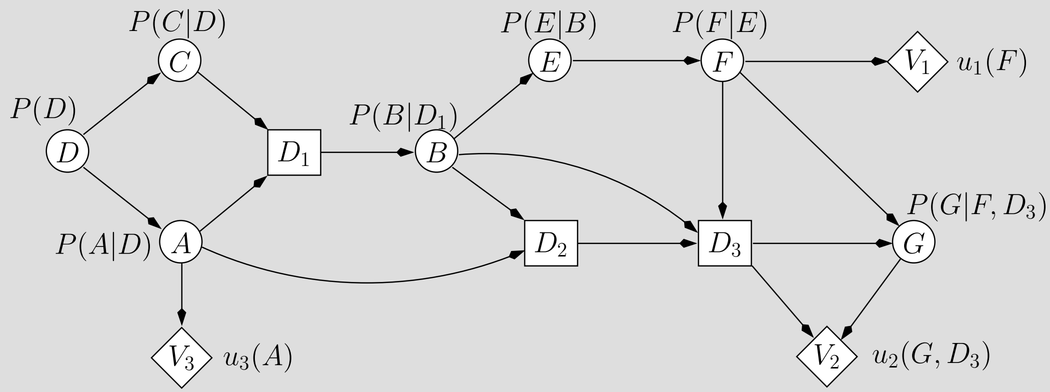



## Exercice 2 (4 points) — *Diagrammes d'influence*

Soit le diagramme d'influence :




**Q 2.1** Indiquez à côté des différents nœuds de ce graphe quelles tables vous stockeriez dans ceux-ci (par exemple, des tables du type $P(A|B)$, $u(X,Y)$, etc).




**Q 2.2** Déterminez un ordre partiel temporel des variables du diagramme d'influence, puis un ordre total compatible, sachant que les décisions sont prises dans l'ordre $D_1$, $D_2$, $D_3$.

L'ordre partiel induit est :

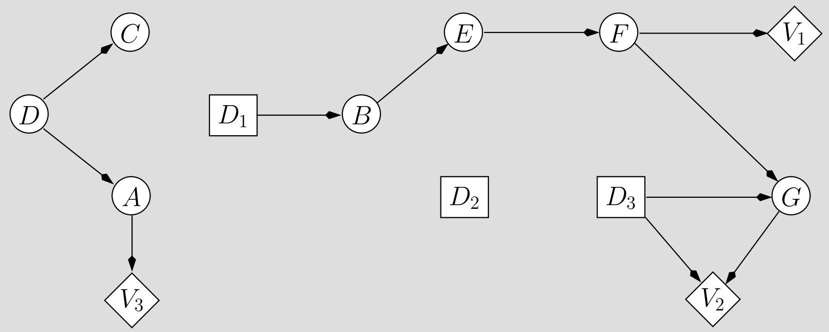
$$\{A, C\} \prec D_1 \prec \{B\} \prec D_2 \prec \{F\} \prec D_3 \prec \{D, E, G\}.$$

Un ordre induit compatible est, par exemple :

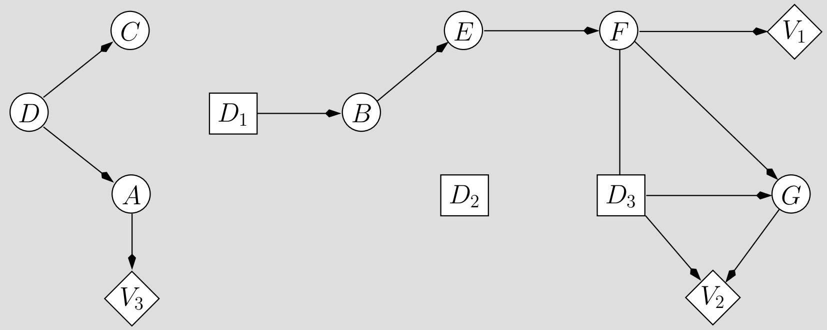
$$A \prec C \prec D_1 \prec B \prec D_2 \prec F \prec D_3 \prec D \prec E \prec G.$$

**Q 2.3** En utilisant l'ordre total précédent, créez un « strong junction tree ». Vous préciserez dans quelles cliques vous stockerez les tables indiquées à la question 2.Q 2.1.

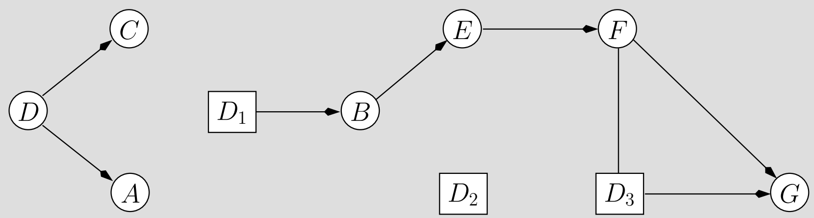
Tout d'abord, on construit le réseau de valuation :




Ensuite, on moralise le réseau de valuation :



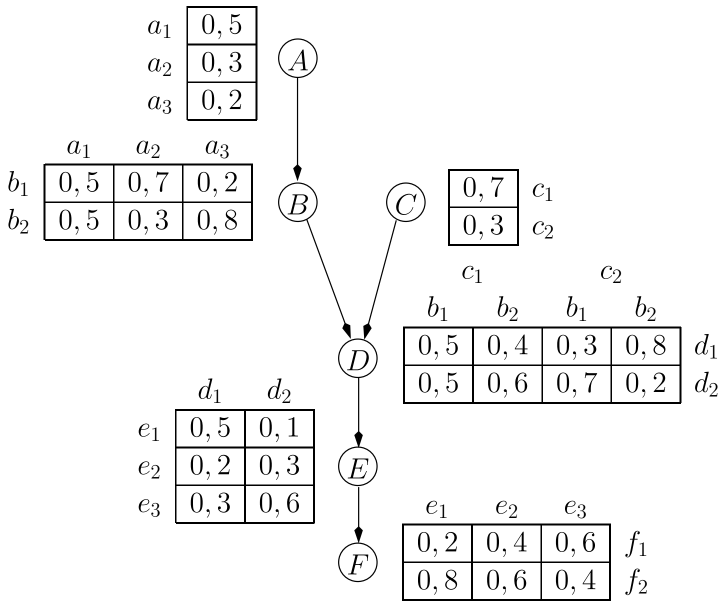
et on supprime les nœuds d'utilité :



On effectue maintenant la triangulation avec l'ordre d'élimination $G, E, D, D_3, F, D_2, B, D_1, C, A$ et on obtient :

## Exercice 3 (3 points) — *Réseaux bayésiens*

On considère le réseau bayésien suivant, où les tables de probabilité conditionnelles sont indiquées à côté des nœuds correspondants :




| | |
|---|---|
| $a_1$ | 0, 5 |
| $a_2$ | 0, 3 |
| $a_3$ | 0, 2 |

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | 0, 5 | 0, 7 | 0, 2 |
| $b_2$ | 0, 5 | 0, 3 | 0, 8 |

| | |
|---|---|
| 0, 7 | $c_1$ |
| 0, 3 | $c_2$ |

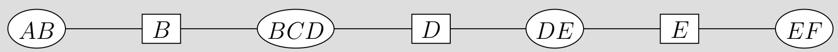
| $c_1$ | | $c_2$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | $b_2$ | $b_1$ | $b_2$ | |
| 0, 5 | 0, 4 | 0, 3 | 0, 8 | $d_1$ |
| 0, 5 | 0, 6 | 0, 7 | 0, 2 | $d_2$ |

| | $d_1$ | $d_2$ |
|---|---|---|
| $e_1$ | 0, 5 | 0, 1 |
| $e_2$ | 0, 2 | 0, 3 |
| $e_3$ | 0, 3 | 0, 6 |

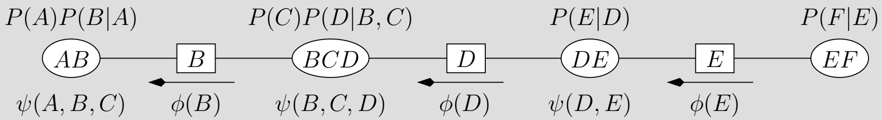
| $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|
| 0, 2 | 0, 4 | 0, 6 | $f_1$ |
| 0, 8 | 0, 6 | 0, 4 | $f_2$ |

Déterminez l'explication la plus probable selon ce réseau, c'est-à-dire le sextuplet $(a_i, b_j, c_k, d_l, e_m,$ ayant la plus grande probabilité. Autrement dit, calculez $\text{Argmax}_X\ P(X)$ où $P$ est la distribution de probabilité jointe de toutes les variables du réseau. Vous préciserez également la probabilité du sextuplet.

On commence par déterminer l'arbre de jonction correspondant au réseau :




On peut maintenant choisir n'importe quelle clique comme racine et propager les Max/Argmax. Ici, nous avons choisi la clique $AB$ :




$$\phi(E) = \text{Argmax}_D P(F|E) = \begin{array}{c|c|c|} & & \\ \hline e_1 & 0,8 & f_2 \\ \hline e_2 & 0,6 & f_2 \\ \hline e_3 & 0,6 & f_1 \\ \hline \end{array}$$

$$\psi(D,E) = P(E|D) \times \phi(E) = \begin{array}{c|c|c|} & d_1 & d_2 \\ \hline e_1 & 0,4 & 0,08 \\ \hline e_2 & 0,12 & 0,18 \\ \hline e_3 & 0,18 & 0,36 \\ \hline \end{array}$$

$$\phi(D) = \text{Argmax}_E \psi(D,E) = \begin{array}{c|c|c|} & & \\ \hline d_1 & 0,4 & e_1 \\ \hline d_2 & 0,36 & e_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\psi(B,C,D) = P(C) \times P(D|B,C) \times \phi(D) = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & c_1 & & c_2 & \\ & b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \\ \hline d_1 & 0,14 & 0,112 & 0,036 & 0,096 \\ \hline d_2 & 0,126 & 0,1512 & 0,0756 & 0,0216 \\ \hline \end{array}$$

$$\phi(B) = \text{Argmax}_{C,D} \psi(B,C,D) = \begin{array}{c|c|c|} & & \\ \hline b_1 & 0,14 & c_1 d_1 \\ \hline b_2 & 0,1512 & c_1 d_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\psi(A,B,C) = P(A) \times P(B|A) \times \phi(B) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline b_1 & 0,035 & 0,0294 & 0,0056 \\ \hline b_2 & 0,0378 & 0,013608 & 0,024192 \\ \hline \end{array}$$

L'optimum est atteint pour $(a_1, b_2)$. On peut maintenant effectuer une phase de diffusion pour propager cette instanciation :
$\phi(b_2)$ est atteint grâce à $c_1 d_2$.
$\phi(d_2)$ est atteint grâce à $e_3$.
$\phi(e_3)$ est atteint grâce à $f_1$.
L'explication la plus probable est donc : $(a_1, b_2, c_1, d_2, e_3, f_1)$, avec un probabilité égale à 0,0378.