Examen du module MGDE

Durée : 1 heure 30

Seuls documents autorisés :
les transparents de cours et les calculatrices

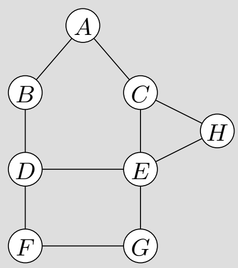
Exercice 1 (3 points) — *Réseaux GAI*

Soit la fonction d'utilité définie sur l'espace $\mathcal{X} = A \times B \times C \times D \times E \times F \times G \times H$ par :

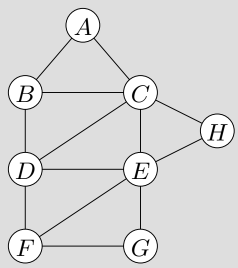
$$u_1(A, B) + u_2(A, C) + u_3(B, D) + u_4(C, E, H) + u_5(D, E) + u_6(D, F) + u_7(E, G) + u_8(F, G).$$

Dessinez un réseau GAI représentant cette utilité. Vous indiquerez dans quelles cliques vous stockeriez les sous-utilités u_i.

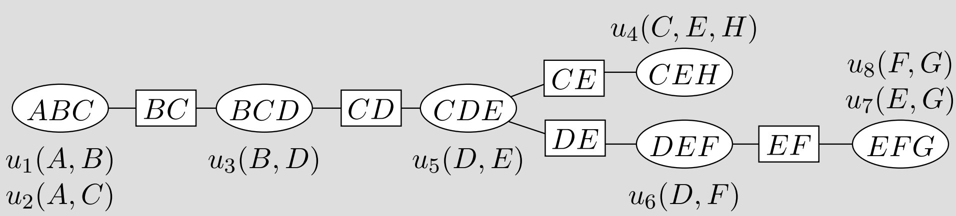
Le graphe markovien correspondant à l'utilité sur $\mathcal{X}$ est :



Le graphe n'étant pas triangulé, il faut le trianguler :

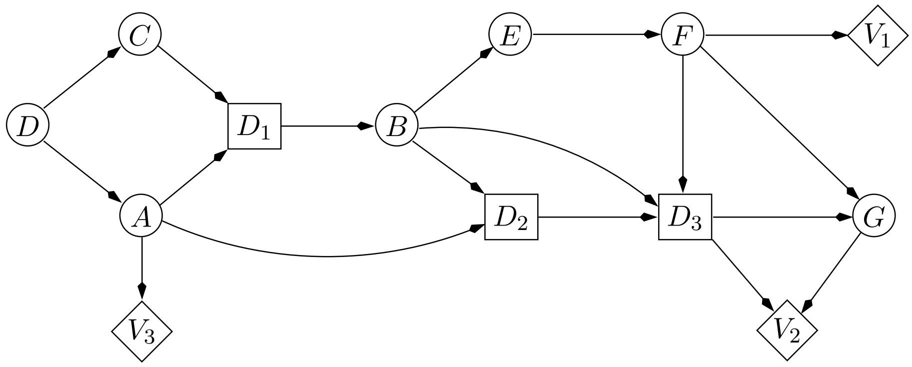


On obtient donc le réseau GAI :

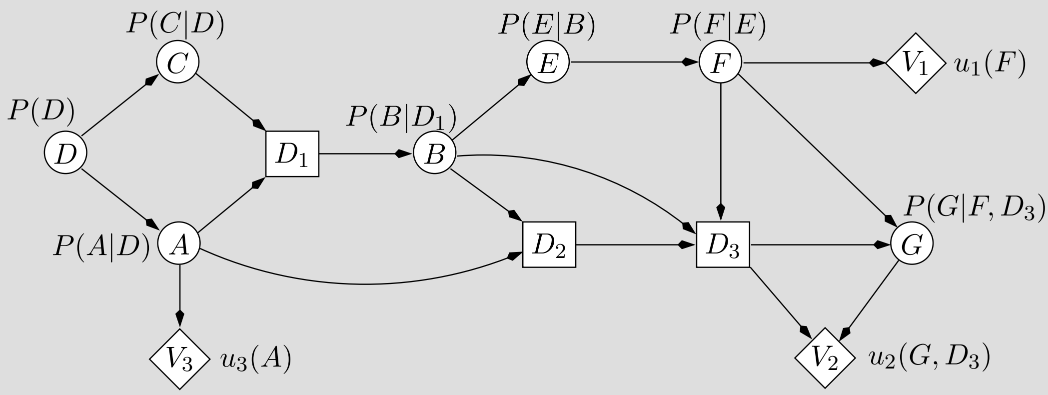


Exercice 2 (4 points) — *Diagrammes d'influence*

Soit le diagramme d'influence :



Q 2.1 Indiquez à côté des différents nœuds de ce graphe quelles tables vous stockeriez dans ceux-ci (par exemple, des tables du type $P(A|B)$, $u(X, Y)$, etc).



Q 2.2 Déterminez un ordre partiel temporel des variables du diagramme d'influence, puis un ordre total compatible, sachant que les décisions sont prises dans l'ordre D_1, D_2, D_3.

L'ordre partiel induit est :

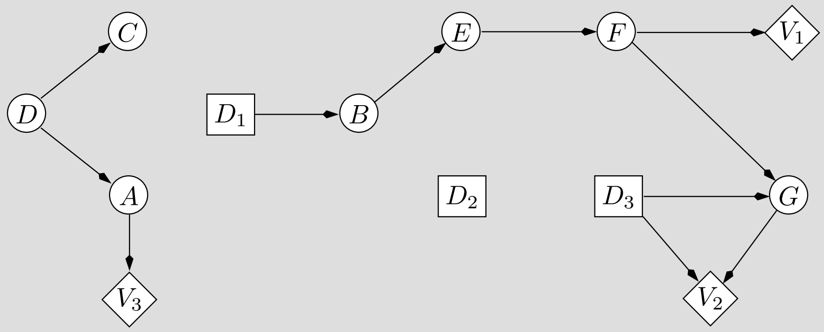
$$\{A, C\} \prec D_1 \prec \{B\} \prec D_2 \prec \{F\} \prec D_3 \prec \{D, E, G\}.$$

Un ordre induit compatible est, par exemple :

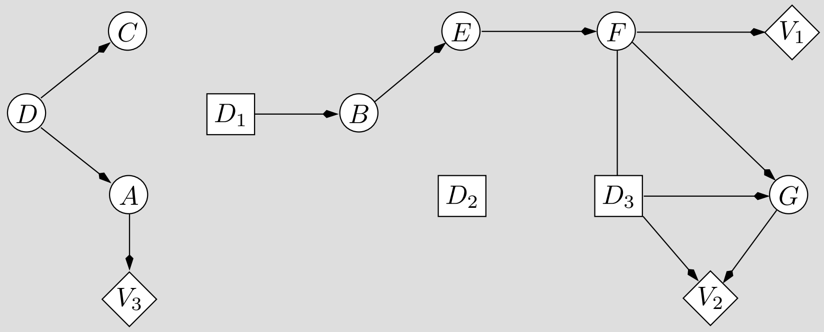
$$A \prec C \prec D_1 \prec B \prec D_2 \prec F \prec D_3 \prec D \prec E \prec G.$$

Q 2.3 En utilisant l'ordre total précédent, créez un « strong junction tree ». Vous préciserez dans quelles cliques vous stockerez les tables indiquées à la question 2.Q 2.1.

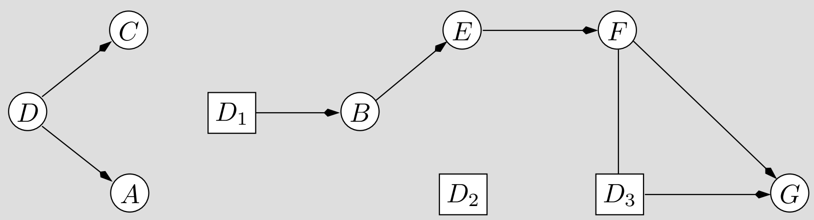
Tout d'abord, on construit le réseau de valuation :



Ensuite, on moralise le réseau de valuation :



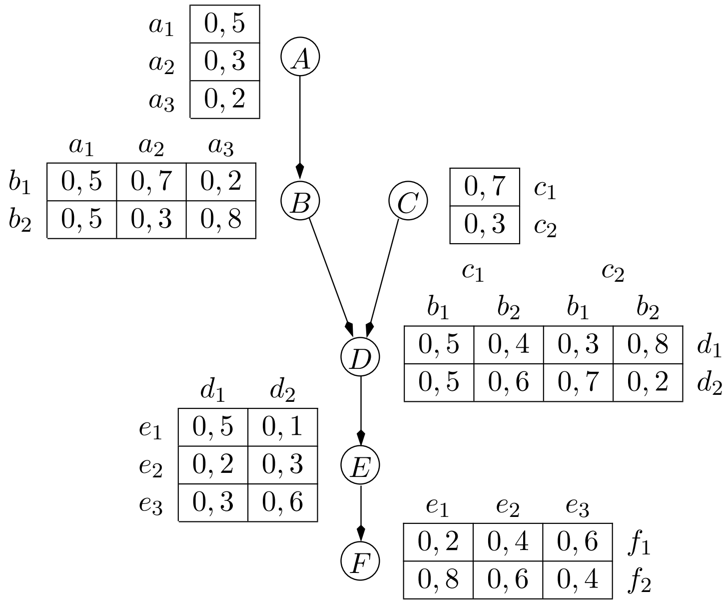
et on supprime les nœuds d'utilité :



On effectue maintenant la triangulation avec l'ordre d'élimination $G, E, D, D_3, F, D_2, B, D_1, C, A$ et on obtient :

Exercice 3 (3 points) — *Réseaux bayésiens*

On considère le réseau bayésien suivant, où les tables de probabilité conditionnelles sont indiquées à côté des nœuds correspondants :



a_1	0,5
a_2	0,3
a_3	0,2

	a_1	a_2	a_3
b_1	0,5	0,7	0,2
b_2	0,5	0,3	0,8

c_1	0,7
c_2	0,3

	c_1		c_2	
	b_1	b_2	b_1	b_2
d_1	0,5	0,4	0,3	0,8
d_2	0,5	0,6	0,7	0,2

	d_1	d_2
e_1	0,5	0,1
e_2	0,2	0,3
e_3	0,3	0,6

	e_1	e_2	e_3
f_1	0,2	0,4	0,6
f_2	0,8	0,6	0,4

Déterminez l'explication la plus probable selon ce réseau, c'est-à-dire le sextuplet $(a_i, b_j, c_k, d_l, e_m, f_n)$ ayant la plus grande probabilité. Autrement dit, calculez $\text{Argmax}_X\ P(X)$ où P est la distribution de probabilité jointe de toutes les variables du réseau. Vous préciserez également la probabilité du sextuplet.

On commence par déterminer l'arbre de jonction correspondant au réseau :

AB — B — BCD — D — DE — E — EF

On peut maintenant choisir n'importe quelle clique comme racine et propager les Max/Argmax. Ici, nous avons choisi la clique AB :

$P(A)P(B\|A)$		$P(C)P(D\|B,C)$		$P(E\|D)$		$P(F\|E)$
AB	B	BCD	D	DE	E	EF
$\psi(A,B,C)$	$\phi(B)$	$\psi(B,C,D)$	$\phi(D)$	$\psi(D,E)$	$\phi(E)$	

$\phi(E) = \text{Argmax}_D P(F|E) =$

e_1	0,8	f_2
e_2	0,6	f_2
e_3	0,6	f_1

$\psi(D,E) = P(E|D) \times \phi(E) =$

	d_1	d_2
e_1	0,4	0,08
e_2	0,12	0,18
e_3	0,18	0,36

$\phi(D) = \text{Argmax}_E \psi(D,E) =$

d_1	0,4	e_1
d_2	0,36	e_3

$\psi(B,C,D) = P(C) \times P(D|B,C) \times \phi(D) =$

	c_1		c_2	
	b_1	b_2	b_1	b_2
d_1	0,14	0,112	0,036	0,096
d_2	0,126	0,1512	0,0756	0,0216

$\phi(B) = \text{Argmax}_{C,D} \psi(B,C,D) =$

b_1	0,14	c_1d_1
b_2	0,1512	c_1d_2

$$\psi(A,B,C) = P(A) \times P(B|A) \times \phi(B) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline b_1 & 0,035 & 0,0294 & 0,0056 \\ \hline b_2 & 0,0378 & 0,013608 & 0,024192 \\ \hline \end{array}$$

L'optimum est atteint pour (a_1, b_2). On peut maintenant effectuer une phase de diffusion pour propager cette instanciation :
$\phi(b_2)$ est atteint grâce à $c_1 d_2$.
$\phi(d_2)$ est atteint grâce à e_3.
$\phi(e_3)$ est atteint grâce à f_1.
L'explication la plus probable est donc : $(a_1, b_2, c_1, d_2, e_3, f_1)$, avec un probabilité égale à 0,0378.