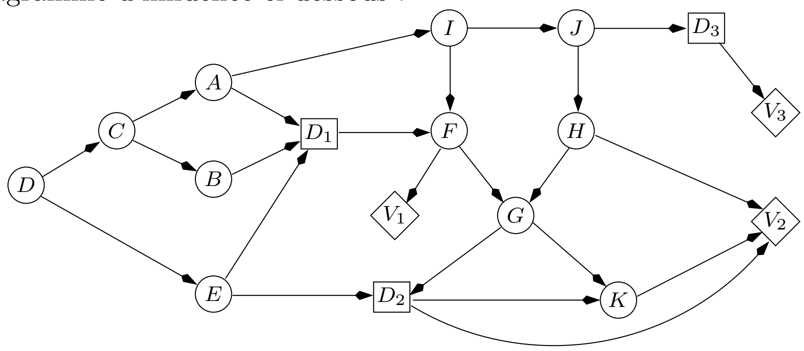
Examen du module MGDE

Durée : 1 heure 30

Seuls documents autorisés :
les transparents de cours et les calculatrices

Exercice 1 (7 points) — *Diagrammes d'influence*

On considère le diagramme d'influence ci-dessous :

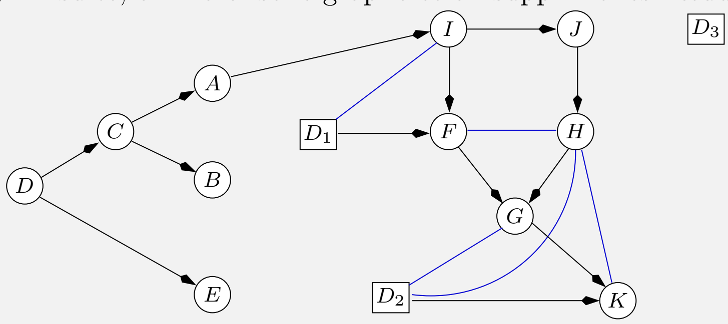


Q 1.1 Déterminez l'ordre partiel temporel $\prec$ de ce diagramme d'influence, c'est-à-dire que vous indiquerez les ensembles D_k et I_k comme vu en cours.

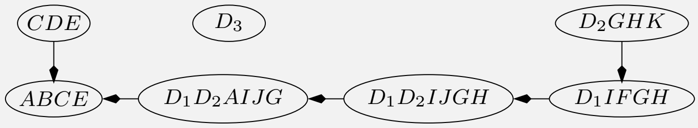
$$\{A, B, E\} \prec D_1 \prec \{G\} \prec D_2 \prec \{J\} \prec D_3 \prec \{C, D, I, F, H, K\}$$

Q 1.2 Déterminez un strong junction tree pour ce diagramme d'influence. Vous indiquerez la séquence d'élimination que vous aurez utilisée.

On commence par supprimer les arcs entrant dans les nœuds de décision (de manière à obtenir un réseau de valuation). Ensuite, on moralise le graphe et on supprime les nœuds d'utilité :

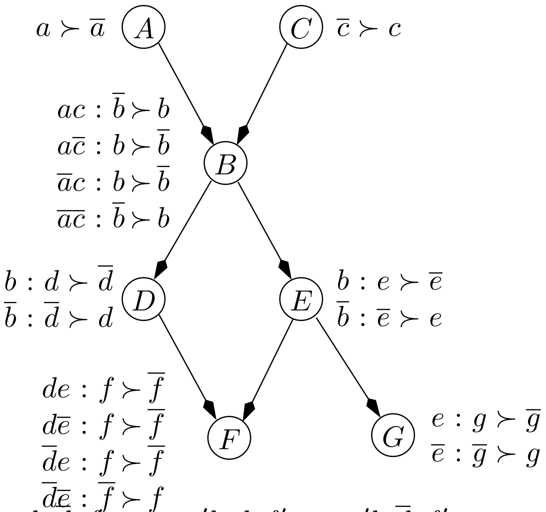


Ensuite, on peut supprimer les variables selon une séquence compatible avec la question 1. Par exemple, la séquence d'élimination $D, C, K, F, H, I, D_3, J, D_2, G, D_1, A, B, E$ produit le strong junction tree suivant :



Exercice 2 (6 points) — *CP-nets*

Soit le CP-net de la figure ci-dessous :



Q 2.1 Est-ce que $abcdefg \succ abc\overline{d}\overline{e}fg \Longrightarrow a'b\overline{c}def'g \succ a'b\overline{c}\overline{d}\overline{e}f'g$ pour tout $a'f' \in \{af, a\overline{f}, \overline{a}f, \overline{af}\}$? Justifiez votre réponse.

Conditionnellement à ses parents, un attribut est indépendant de tous les autres attributs du réseau. Donc conditionnellement à B, E est indépendant de F et G. De la même manière, conditionnellement à B, D est indépendant de F. Par conséquent :

$$abcdefg \succ abc\overline{d}\overline{e}fg \Longrightarrow abcdef'g \succ abc\overline{d}\overline{e}f'g, \quad \forall f' \ .$$

Étant donné que les deux n-uplets à comparer ont en commun abc et que les autres attributs ne dépendent qu'au plus de b, si l'on fixe la valeur de b, on peut changer les valeurs de a et c de part et d'autre sans renverser la relation de préférence. D'où :

$$abcdefg \succ abc\overline{d}\overline{e}fg \Longrightarrow a'b\overline{c}def'g \succ a'b\overline{c}\overline{d}\overline{e}f'g, \quad \forall a', f' \ .$$

Q 2.2 Quel est le n-uplet préféré du décideur selon le CP-net ?

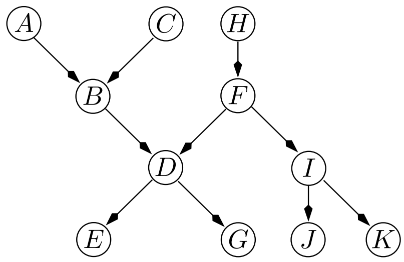
On balaie le graphe du haut vers le bas, et on instancie les attributs à leur meilleure value possible. L'élment préféré du décideur est donc : $ab\overline{c}defg$.

Q 2.3 Prouvez que $ab\overline{c}d\overline{e}fg \succ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}ef\overline{g}$.

Partons de $\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}ef\overline{g}$. Conditionnellement à e, $g \succ \overline{g}$. Par conséquent, $\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}efg \succ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}ef\overline{g}$. De même, conditionnellement à $\overline{b}$, $\overline{e} \succ e$. Donc $\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\overline{e}fg \succ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}efg$. On sait de plus que $a\overline{a}$, donc $a\overline{b}\overline{c}\overline{d}\overline{e}fg \succ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\overline{e}fg$. Conditionnellement à $a\overline{c}$, $b \succ \overline{b}$. Donc : $ab\overline{c}\overline{d}\overline{e}fg \succ a\overline{b}\overline{c}\overline{d}\overline{e}fg$. Conditionnellement à b, $d \succ \overline{d}$. Donc : $ab\overline{c}d\overline{e}fg \succ ab\overline{c}\overline{d}\overline{e}fg$. Par transitivité de $\succ$, on a donc bien : $ab\overline{c}d\overline{e}fg \succ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}ef\overline{g}$.

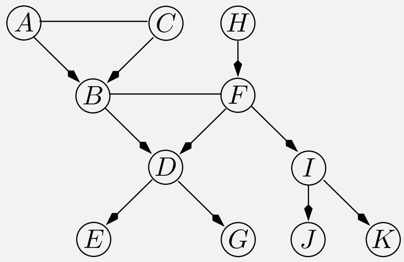
Exercice 3 (7 points) — *Réseaux bayésiens*

Soit le réseau bayésien de la figure ci-dessous :

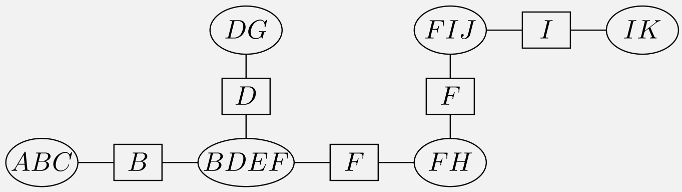


Q 3.1 Donnez l'arbre de jonction obtenu en utilisant la séquence d'élimination $A, K, I, J, G, H, C, D, B, F, E$. Vous indiquerez à côté des cliques les probabilités que vous stockerez dans ces dernières.

On commence par moraliser le graphe :



Ensuite, on réalise la triangulation :



Q 3.2 En supposant que chaque variable possède 10 modalités, combien d'additions et de multiplications (sur des nombres réels) seront réalisées par l'algorithme de Shafer-Shenoy pour calculer l'ensemble des messages envoyés dans les deux sens sur les séparateurs ?

Voici le nombre d'opérations pour envoyer des messages sur chaque séparateur :

	$\rightarrow$		$\leftarrow$	
sépar.	$\#\times$	$\#+$	$\#\times$	$\#+$
B	0	1000	20000	10000
D	0	100	20000	10000
F	20000	10000	100	100
F	100	100	1000	1000
I	1000	1000	100	100

Par conséquent, l'ensemble des messages requiert 62300 multiplications et 33400 additions. Notons toutefois que l'on peut réduire ce nombre en effectuant judicieusement les multiplications. Par exemple, lorsque $BDEF$ veut envoyer un message sur le séparateur B, $\sum_{DEF}[[P(B, D, E, F) \times \pi_D] \times \pi_F]$, où π_D et π_F sont les messages provenant des séparateurs D et F, nécessite 20000 multiplications, puis 10000 additions. Mais si l'on commence par multiplier $\pi_D \times \pi_F$, puis on multiplie ce résultat avec $P(B, D, E, F)$, on aura seulement 10100 multiplications.