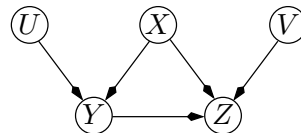


**Examen du module MGDE**

Durée : 3 heures

**Exercice 1 (5 points)**

La loi jointe  $p(u, x, v, y, z)$  des 5 v.a.  $(U, X, V, Y, Z)$  admet le graphe d'indépendance  $G$  de la figure ci-dessous :



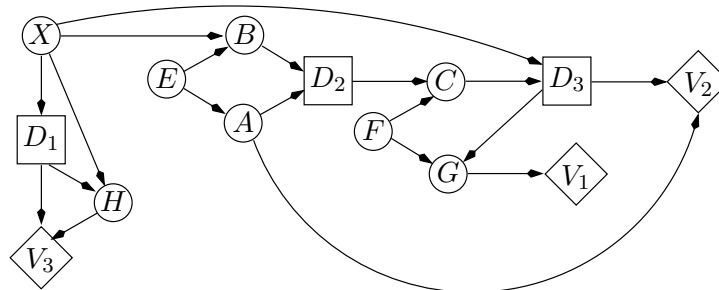
**Q 1.1** Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :  
 $V \perp\!\!\!\perp (X, Y)$ ?     $U \perp\!\!\!\perp (V, X)$ ?     $U \perp\!\!\!\perp V \mid (Y, Z)$ ?  
 $U \perp\!\!\!\perp V \mid (X, Y)$ ?     $U \perp\!\!\!\perp V \mid (X, Y, Z)$ ?

**Q 1.2** L'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été  $UXVYZ$ ; quelles sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui ont servi à construire le graphe?  
 Comment  $p(u, x, v, y, z)$  se décompose-t-elle?

**Q 1.3** À partir des relations explicitées à la question 2 et des propriétés générales de la relation  $\cdot \perp\!\!\!\perp \cdot \mid \cdot$  démontrez la validité des assertions qui avaient été obtenues à la question 1 par d-séparation ainsi que celle de  $U \perp\!\!\!\perp (V, Z) \mid (X, Y)$  et de  $U \perp\!\!\!\perp Z \mid (X, V, Y)$ .

**Exercice 2 (4,5 points)**

Soit le diagramme d'influence ci-dessous :



**Q 2.1** Indiquez à côté des différents nœuds de ce graphe quelles tables vous stockeriez dans ceux-ci (par exemple, des tables du type  $P(A|B)$ ,  $u(X, Y)$ , etc).

**Q 2.2** Déterminez un ordre partiel temporel des variables, puis un ordre total compatible, sachant que les décisions sont prises dans l'ordre  $D_1, D_2, D_3$ .

**Q 2.3** En utilisant l'ordre total précédent, créez un « strong junction tree ». Vous préciserez dans quelles cliques vous stockerez les tables indiquées à la question 1.

**Exercice 3 (5 points)**

Une entreprise fabrique des puces électroniques et cherche à améliorer l'efficacité (variable  $E$ ) de ses

ouvriers. L'efficacité d'un(-e) ouvrier(-ère) est liée à sa capacité de concentration (variable  $C$ ), sa formation technique (variable  $F$ ) et sa dextérité manuelle (variable  $D$ ). Le chef d'entreprise dispose d'une base de données, constituée d'extraits des fiches personnelles de chacun de ses employés passés ou actuels, lui permettant d'estimer la loi jointe  $p(c, f, d, e)$  de ces 4 variables. En revanche, la loi lui interdisant toute discrimination selon l'âge (variable  $A$ ) ou le sexe (variable  $S$ ), ces deux variables ne sont pas retenues dans la base, bien qu'il sache que :

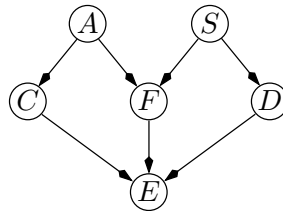
- degré de concentration et niveau de formation dépendent de l'âge ;
- degré de dextérité et niveau de formation dépendent du sexe.

**Q 3.1** L'analyse de la loi jointe des v.a.  $(C, F, D, E)$  montre que :

- Ces v.a. sont deux à deux dépendantes dans tout contexte sauf la paire  $(C, D)$  ;
- $C \perp\!\!\!\perp D \mid F$  ;  $\text{NON}[C \perp\!\!\!\perp D \mid E]$  ;  $\text{NON}[C \perp\!\!\!\perp D \mid (F, E)]$ .

À quel graphe marqué l'application de l'algorithme  $IC^*$  aboutit-elle ?

**Q 3.2** On admet la validité du graphe causal de la figure ci-dessous.



Le chef d'entreprise se demande dans quelle mesure une meilleure formation améliorerait l'efficacité de ses ouvriers ; pour cela, il veut évaluer l'effet  $p(e \parallel f^*)$  sur  $E$  d'une intervention sur  $F$ .

Y a-t-il une ou des variable(s) permettant d'identifier cet effet par blocage en amont ?

Si oui, quelle expression obtient-on pour  $p(e \parallel f^*)$  ?

#### Exercice 4 (6,5 points)

Considérons une relation de préférence  $\succsim$  sur un ensemble  $\mathcal{X} = A \times B \times C \times D \times E \times F \times G \times H \times K \times L \times M \times P \times Q \times R \times S$  représentable par la fonction d'utilité GAI-décomposable :

$$u_1(A, B, D, E, G) + u_2(A, B, C) + u_3(D, F, L) + u_4(E, H) + u_5(G, K) + u_6(F, P) + u_7(L, M) + u_8(Q, R) + u_9(R, S).$$

**Q 4.1** Dessinez le réseau GAI représentant la fonction d'utilité ci-dessus.

**Q 4.2** Supposons que l'on veuille calculer l'élément préféré selon  $\succsim$  dans  $\mathcal{X}$ . Indiquez sur le réseau GAI quels messages vous feriez transiter lors d'une phase de collecte vers les cliques  $DFL$  et  $QR$  pour effectuer ce calcul.

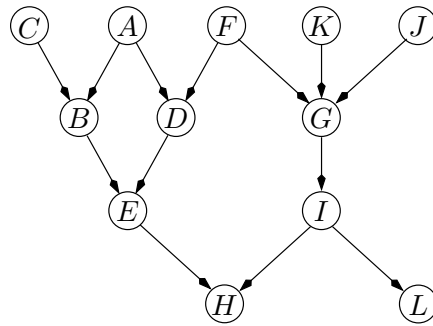
**Q 4.3** En notant  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ , etc, les valeurs des attributs à l'optimum, indiquez les messages propagés à partir des cliques  $DFL$  et  $QR$  lors de la phase de diffusion.

**Q 4.4** Si l'on rajoute la contrainte  $M \neq P$ , quel nouveau réseau GAI obtient-on ?

**Q 4.5** Si l'on rajoute en outre la contrainte  $A = a_0$ , c'est-à-dire que l'on fixe la valeur de l'attribut  $A$  à  $a_0$ , quel nouveau réseau GAI obtient-on ?

#### Exercice 5 (4 points)

Considérons le réseau bayésien suivant :



**Q 5.1** Dessinez l'arbre d'élimination correspondant à la séquence d'élimination de variables :  $L, B, C, A, H, D, I, E, G, F, K, J$ .

**Q 5.2** Dessinez l'arbre de jonction obtenu à partir de l'arbre d'élimination en utilisant l'algorithme vu en cours.