Examen du module MGDE

Durée : 3 heures

Exercice 1

On considère le réseau bayésien suivant :

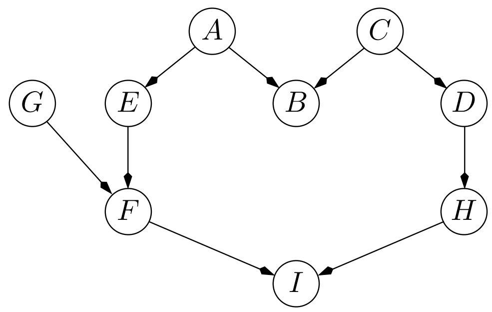


FIG. 1 – Un réseau bayésien avec cycle.

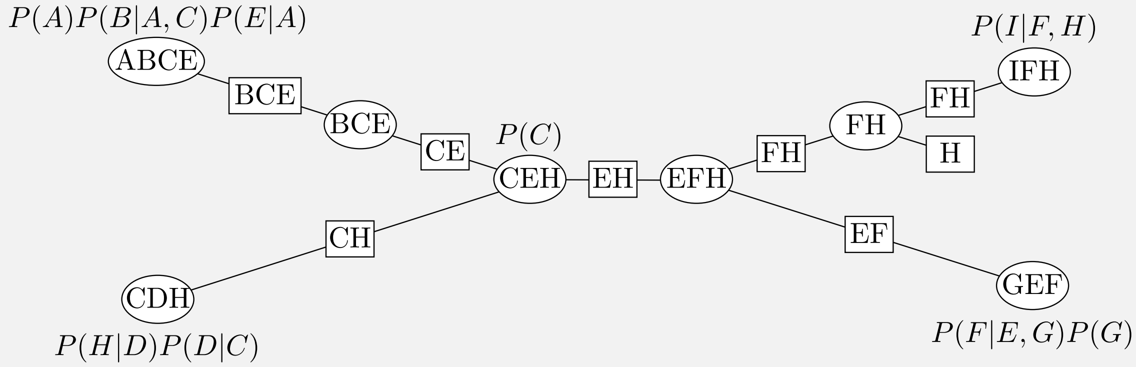
Q 1.1 Donnez la décomposition de la loi jointe $P(A,B,C,D,E,F,G,H,I)$.

La décomposition de la loi joint est bien évidemment :

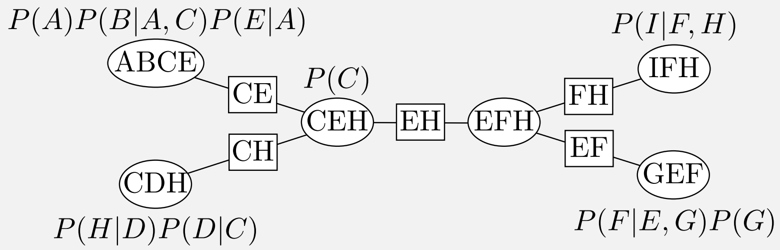
$$P(A)P(C)P(G)P(E|A)P(B|A,C)P(D|C)P(F|E,G)P(H|D)P(I|F,H).$$

Q 1.2 Dessinez l'arbre de jonction qu'obtiendrait l'algorithme de Shafer-Shenoy en utilisant la séquence d'élimination A, D, B, C, I, G, E, F, H. Vous préciserez à côté de chacune des cliques les matrices (probabilités) stockées par ces dernières.

L'arbre d'élimination obtenu est :



et l'arbre de jonction est :



Q 1.3 Les variables F et H sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.

F et H sont indépendants car la chaîne FIH est bloquée par I et la chaîne $FEABCDH$ est bloquée par B.

Q 1.4 Lors de la phase d'initialisation (calcul de toutes les probabilités a priori), peut-on exécuter l'algorithme de Pearl sans effectuer de coupe-cycle ? Justifiez votre réponse. Le cas échéant, indiquez les calculs que réaliserait cet algorithme sans coupe, sinon indiquez quelle coupe vous feriez puis indiquez les calculs de Pearl avec cette coupe.

On peut effectuer Pearl sans coupe-cycle car F et H étant indépendants, ainsi que A et C, et G et E, tous les messages reçus par un noeud donné du réseau sont indépendants, ce qui garantit que l'algorithme de Pearl produit un résultat correct.
Algorithme de Pearl :
A envoie à B le message $\pi_B(A) = P(A)$ et à E le message $\pi_E(A) = P(A)$
C envoie à B le message $\pi_B(C) = P(C)$ et à D le message $\pi_D(C) = P(C)$
G envoie à F le message $\pi_F(G) = P(G)$
B calcule $P(B) = \sum_{A,C} P(B|A,C)\pi_B(A)\pi_B(C) = \sum_{A,C} P(B|A,C)P(A)P(C)$
D calcule $P(D) = \sum_C P(D|C)\pi_D(C)$ et envoie à H le message $\pi_H(D) = P(D)$
E calcule $P(E) = \sum_A P(E|A)\pi_E(A)$ et envoie à F le message $\pi_F(E) = P(E)$
F calcule $P(F) = \sum_{E,G} P(F|E,G)\pi_F(E)\pi_F(G)$ et envoie à I le message $\pi_I(F) = P(F)$
H calcule $P(H) = \sum_D P(H|D)\pi_H(D)$ et envoie à I le message $\pi_I(H) = P(H)$
I calcule $P(I) = \sum_{F,H} P(I|F,H)\pi_I(F)\pi_I(H)$

Q 1.5 Les variables F et H sont-elles indépendantes conditionnellement à une information e_B sur B ? Justifiez votre réponse.

F et H ne sont pas indépendants conditionnellement à e_B car la chaîne $FEABCDH$ est active.

Q 1.6 Décrivez les calculs que ferait Pearl pour obtenir $P(I|e_B)$. Si vous faites une ou plusieurs coupes, indiquez la(les)quelle(s).

Puisque F et H ne sont pas indépendantes, on doit effectuer une coupe. Au hasard, choisissons la variable D. Dans ce cas, l'arc (D, H) est supprimé et tous les messages sur la chaîne $DCBAEFIH$

contiennent la variable D, ce qui nous donne les opérations suivantes :
I demande à F et H leurs messages
H envoie le message $\pi_I(H) = P(H|D)$
F demande à G et E leurs messages
G envoie le message $\pi_F(G) = P(G)$
E demande à A son message
A demande à B son message
B demande à C son message
C demande à D son message
D envoie à C le message $\lambda_D(C) = P(D|C)$
C calcule et envoie à B le message $\pi_B(C) = P(C)\lambda_D(C) = P(C, D)$
B calcule et envoie à A le message $\lambda_B(A) = \sum_{B,C} P(B|A, C)\pi_B(C)P(e_B|B) = P(D, e_B|A)$
A calcule et envoie à E le message $\pi_E(A) = P(A)\lambda_B(A) = P(A, D, e_B)$
E calcule et envoie à F le message $\pi_F(E) = \sum_A P(E|A)\pi_E(A) = P(E, D, e_B)$
F calcule et envoie à I le message $\pi_I(F) = \sum_{E,G} P(F|E, G)\pi_F(E)\pi_F(G) = P(D, F, e_B)$
I calcule $P(I, e_B) = \sum_{F,H,D} P(I|F, H)\pi_I(F)\pi_I(H) = \sum_{F,H,D} P(I|F, H)P(D, F, e_B)P(H|D)$
I calcule $P(I|e_B) = P(I, e_B)/\sum_I P(I, e_B)$

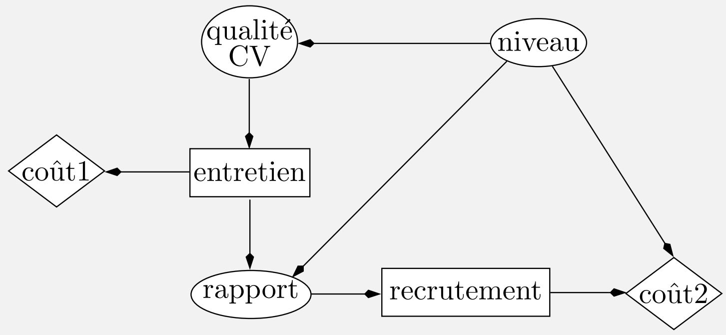
Exercice 2

Le but de cet exercice est de créer un diagramme d'influence permettant d'aider le service du personnel d'une entreprise.
Le service reçoit des CV de la part de candidats. Le niveau réel de ces derniers est séparé en 4 catégories : excellent, bon, moyen, mauvais. Ce niveau n'est pas connu du service du personnel mais il a une influence non négligeable sur la qualité des CV reçus. Lors des lectures des CV, le service répartit ces derniers en 3 catégories A, B, C. Selon l'évaluation obtenue, on décide ou non de procéder à un entretien du candidat. Cet entretien a un coût de 50 €. À l'issue de chaque entretien, l'interviewer écrit un rapport qui contient ses impressions de concernant le candidat (bon/moyen/mauvais). Ce rapport est ensuite transmis au chef du personnel qui décide ou non de recruter le candidat. Cette décision a le coût suivant pour l'entreprise :

décision	recrutement				pas de recrutement			
niveau réel	excellent	bon	moyen	mauvais	excellent	bon	moyen	mauvais
coût	-1000 €	-700 €	-200 €	700 €	500 €	200 €	0 €	0 €

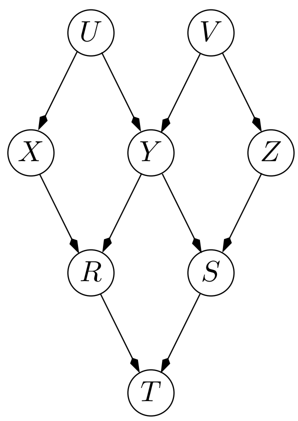
Q 2.1 Dessinez le diagramme d'influence représentant le problème de décision ci-dessus.

Dans le graphe ci-dessous, coût1 correspond au coût de l'entretien et coût2 est l'utilité du recrutement.



Exercice 3

La loi jointe $p(u, v, x, y, z, r, s, t)$ des 8 v.a. (U, V, X, Y, Z, R, S, T) admet le graphe d'indépendance suivant :



Q 3.1 Comment $p(u, v, x, y, z, r, s, t)$ se décompose-t-elle ?

$$p(u, v, x, y, z, r, s, t) = p(u)p(v)p(x/u)p(y/u, v)p(z/v)p(r/x, y)p(s/y, z)p(t/r, s).$$

Q 3.2 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$$X \perp\!\!\!\perp Z\,? \qquad X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y\,? \qquad X \perp\!\!\!\perp Z \mid R\,? \qquad X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, S)\,?$$
$$X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, V)\,? \qquad X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, V, S)\,? \qquad X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, Y, V)\,?$$

(lorsque la réponse est non, on indiquera une chaîne active)

$X \perp\!\!\!\perp Z\,?$	OUI, car toute chaîne est bloquée en Y, R, S ou T
$X \perp\!\!\!\perp Z \mid Y\,?$	NON (en général) car la chaîne $XUYVZ$ est active
$X \perp\!\!\!\perp Z \mid R\,?$	NON car les chaînes $XRYVZ$ et $XUYVZ$ sont actives
$X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, S)\,?$	NON car $XRYVZ$, $XUYVZ$ et $XRYSZ$ sont actives
$X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, V)\,?$	OUI, car toute chaîne est bloquée en Y, S ou T
$X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, V, S)\,?$	NON car la chaîne $XRYSZ$ est active
$X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, Y, V)\,?$	OUI, car toute chaîne est bloquée en Y, R ou V

Q 3.3 L'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été $UVXYZRST$; quelles sont les propriétés d'indépendances conditionnelles qui ont servi à construire le graphe ?

Si l'ordre d'énumération a été $UVXYZRST$, les propriétés d'indépendances conditionnelles qui ont servi à construire le graphe sont :

$$V \perp\!\!\!\perp U\ ; \qquad X \perp\!\!\!\perp V \mid U\,; \qquad Y \perp\!\!\!\perp X \mid (U, V)\,;$$
$$Z \perp\!\!\!\perp (U, X, Y) \mid V\,; \qquad R \perp\!\!\!\perp (U, V, Z) \mid (X, Y)\,;$$
$$S \perp\!\!\!\perp (U, V, X, R) \mid (Y, Z); \qquad T \perp\!\!\!\perp (U, V, X, Y, Z) \mid (R, S).$$

Q 3.4 À partir de ces dernières propriétés et des propriétés générales de la relation $\cdot \perp\!\!\!\perp \cdot \mid \cdot$, montrez successivement que :

$$Z \perp\!\!\!\perp X \mid (V, Y), \qquad R \perp\!\!\!\perp Z \mid (X, V, Y) \qquad \text{et} \qquad X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, Y, V)$$

Par DECOMPOSITION et UNION FAIBLE,
$Z \perp\!\!\!\perp (U, X, Y) \mid V \Longrightarrow Z \perp\!\!\!\perp (X, Y) \mid V \Longrightarrow Z \perp\!\!\!\perp X \mid (V, Y)$;
et de même,
$R \perp\!\!\!\perp (U, V, Z) \mid (X, Y) \Longrightarrow R \perp\!\!\!\perp (V, Z) \mid (X, Y) \Longrightarrow R \perp\!\!\!\perp Z \mid (X, V, Y)$
Par SYMETRIE, $R \perp\!\!\!\perp Z \mid (X, V, Y) \Longrightarrow Z \perp\!\!\!\perp R \mid (X, V, Y)$
Par CONTRACTION,DECOMPOSITION et SYMETRIE :

$$\left.\begin{array}{l} Z \perp\!\!\!\perp X \mid (V, Y) \\ Z \perp\!\!\!\perp R \mid (X, V, Y) \end{array}\right\} \Longrightarrow Z \perp\!\!\!\perp (X, R) \mid (V, Y) \Longrightarrow Z \perp\!\!\!\perp X \mid (R, V, Y) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Z \mid (R, V, Y).$$

Q 3.5 Quel est le graphe moral dérivé du graphe d'indépendance donné ? Que peut-on dire du cycle $XUVZSR$? Quel est le graphe moral triangulé ? Quelles sont ses cliques ?

Le graphe moral contient le cycle sans corde $XUVZSR$; pour le trianguler il est nécessaire d'ajouter des arêtes, par exemple XV, XZ et XS (cf. figure 2). Le graphe moral triangulé a 5 cliques : $UVXY$, $VXYZ$, $XYZS$, $XYRS$ et RST.

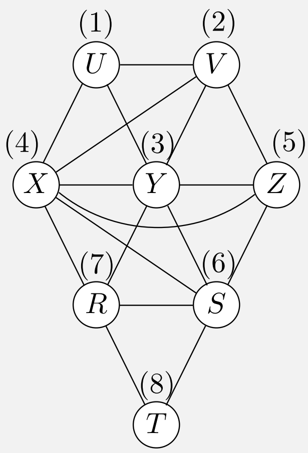


Fig. 2: Graphe moral triangulé.

Q 3.6 Énumérez les sommets puis les cliques en appliquant l'algorithme de recherche de la cardinalité maximum et construisez un arbre de jonction.
[On notera $C_i, i = 1, \ldots, 5$ les cliques et $S_l, l = 1, \ldots, 4$, les séparateurs de cliques].

L'algorithme de recherche de la cardinalité maximum classe les sommets (solution non-unique) dans l'ordre indiqué sur la figure 2. On en déduit un classement des 5 cliques et un arbre de jonction (solution non-unique)(figure 3) :

i	1	2	3	4	5
C_i	$UVXY$	$VXYZ$	$XYZS$	$XYRS$	RST
$j(i)$	–	1	2	2	4

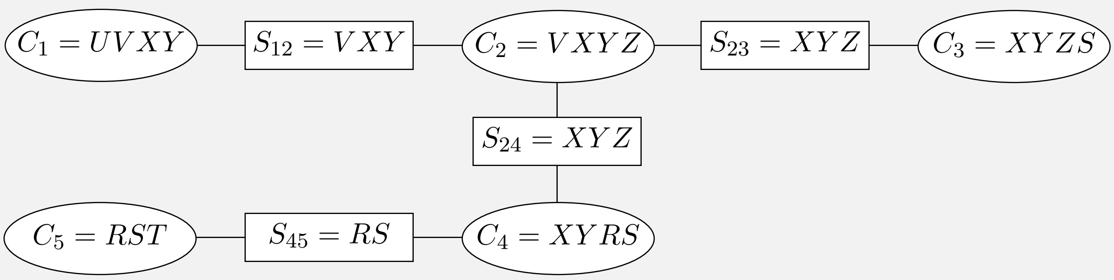


Fig. 3: Arbre de jonction.

Q 3.7 Utilisant la décomposition de la question 1, proposez un système de potentiels de cliques et de séparateurs de cliques ; montrez, selon le cas, que ce système est cohérent (c'est-à-dire en équilibre selon Jensen) ou qu'il ne l'est pas.

Système de potentiels de cliques et de séparateurs de cliques :

$$p(u,v,x,y,z,r,s,t) = \frac{\prod_i \varphi_i(c_i)}{\prod_l \psi_l(s_l)} \text{ avec :}$$

$\varphi_1(u,v,x,y) = p(u)p(v)p(x/u)p(y/u,v)$;
$\varphi_2(v,x,y,z) = p(z/v)$;
$\varphi_3(x,y,z,s) = p(s/y,z)$;
$\varphi_4(x,y,r,s) = p(r/x,y)$;
$\varphi_5(r,s,t) = p(t/r,s)$;
$\psi_l(s_l) = 1, \forall l$.
Ce système n'est pas équilibré (en général) puisque, par ex., $\exists v,x,y$ tels que :

$$\psi_{12}(v,x,y) = 1 \neq p(v,x,y) = \sum_u p(u,v,x,y) = \sum_u p(u)p(v)p(x/u)p(y/u,v) = \sum_u \varphi_1(u,v,x,y).$$

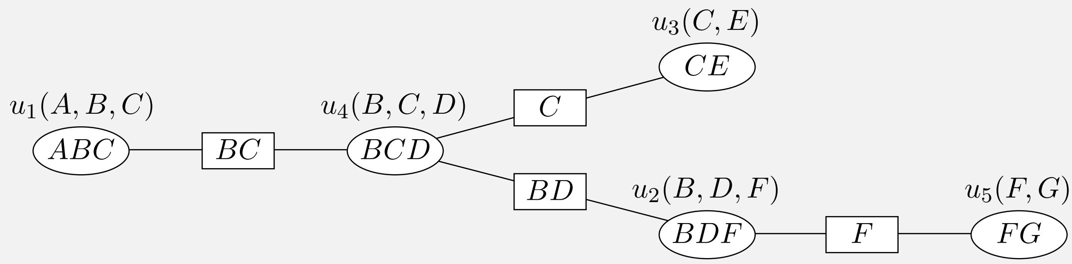
Exercice 4

Soit la décomposition additive généralisée suivante :

$$u(A,B,C,D,E,F,G) = u_1(A,B,C) + u_2(B,D,F) + u_3(C,E) + u_4(B,C,D) + u_5(F,G).$$

Q 4.1 Dessinez un réseau GAI correspondant.

Le graphe ci-dessous est un réseau GAI possible :



Q 4.2 On veut savoir quel est le septuplet maximisant la fonction d'utilité, autrement dit on cherche les valeurs de A, B, etc, maximisant :

$$\max_{A,B,C,D,E,F,G} u(A,B,C,D,E,F,G).$$

Bien entendu, le max sur tous les attributs est égal au max sur un premier attribut du max sur un deuxième attribut du max sur un troisième attribut, etc, de la fonction d'utilité puisque celle-ci est définie sur le produit cartésien des attributs. Autrement dit, obtenir le max sur tous les attributs revient à appliquer une séquence d'élimination (en utilisant l'opérateur max) sur l'utilité jointe $u(A,B,C,D,E,F,G)$. On voit donc qu'il existe un parallèle avec le calcul des probabilités dans un réseau bayésien/arbre de jonction.
En utilisant ce parallèle, indiquez une séquence d'élimination efficace pour calculer le max sur tous les attributs et précisez les calculs que vous feriez à chaque élimination.

Si l'on fait le parallèle avec l'algorithme de Shafer-Shenoy, il faut éliminer les variables des cliques extérieures du graphe vers les cliques intérieures. Ici, on peut donc utiliser la séquence suivante : A, E, G, C, B, D, F. Ainsi :

$$\max_{A,B,C,D,E,F,G} u(A,B,C,D,E,F,G) = \left(\max_F \left(\max_D \left(\max_B \left(\max_C \left(\max_G \left(\max_E \left(\max_A u(A,B,C,D,E,F,G)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Pour ce réseau, la séquence de calculs suivante est optimale :
collecte :
la clique ABC transmet au séparateur BC le message $\max_A u_1(A,B,C) = \psi(B,C)$
la clique CE transmet au séparateur C le message $\psi(C) = \max_E u_3(C,E) = \psi(C)$
la clique FG transmet au séparateur F le message $\psi(F) = \max_G u_5(F,G)$
la clique BCD absorbe les messages $\psi(B,C)$ et $\psi(C)$ en calculant
$\phi(B,C,D) = u_4(B,C,D) + \psi(B,C) + \psi(C)$
la clique BCD transmet au séparateur BD le message $\psi(B,D) = \max_C \phi(B,C,D)$
la clique BDF absorbe les messages $\psi(B,D)$ et $\psi(F)$ en calculant
$\phi(B,D,F) = u_2(B,D,F) + \psi(B,D) + \psi(F)$
la clique BDF calcule le max sur B,D,F de $\phi(B,D,F)$ et
elle sauvegarde des valeur b,d,f de B,D,F obtenues pour ce max

distribution :
la clique BDF transmet au séparateur F la valeur f et au séparateur BD le couple (b,d)
la clique FG récupère f du séparateur F et extrait une valeur g de G telle que $\psi(F) = u_5(f,g)$
la clique BCD récupère (b,d) du séparateur BD et extrait une valeur c de C telle que $\psi(b,d) = \phi(b,c,d)$
la clique BCD transmet au séparateur C une valeur c et au séparateur BC le couple (b,c)
la clique CE récupère c du séparateur C et extrait une valeur e de E pour laquelle $\psi(c) = u_3(c,e)$
la clique ABC récupère (b,c) du séparateur BC et extrait une valeur a de A telle que $\psi(b,c) = u_1(a,b,c)$

Q 4.3 Déduisez-en un algorithme permettant de calculer une instanciation des attributs maximisant une utilité décomposable selon un arbre GAI.

Algorithme d'instanciation :

1. On choisit arbitrairement une clique R de l'arbre GAI comme racine.
2. *Phase de collecte :*
La racine demande à tous ses voisins de lui envoyer des messages. Ceux-ci demandent à leur tour à leurs autres voisins de transmettre des messages et ainsi de suite. Lorsqu'une clique C a reçu tous les messages qu'elle attendait, elle effectue la somme de tous ces messages avec la sous-utilité qu'elle stocke, obtenant ainsi une fonction $\phi(C)$. Si C n'est pas la racine, elle envoie alors au séparateur S qui lui a demandé un message la valeur $\psi(S) = \max_{C\setminus S} \phi(C)$. Enfin la racine calcule une configuration de ses attributs qui maximise $\max_R \phi(R)$.
3. *Phase de distribution :*
La racine transmet à ses séparateurs adjacents une valeur de ses variables qui ont permis d'obtenir le $\max_R \phi(R)$. Les séparateurs transmettent ces valeurs à leurs autres cliques adjacentes. Lorsqu'une clique C reçoit un message s d'un séparateur S, elle calcule une valeur c' des variables de $C\setminus S$ telle que $\psi(s) = \phi(c', s)$. La clique transmet alors à ses autres séparateurs S_i les valeurs $\text{Proj}_{C\setminus S_i} c'$ de ses variables, et ainsi de suite.