

Examen du module MGDE

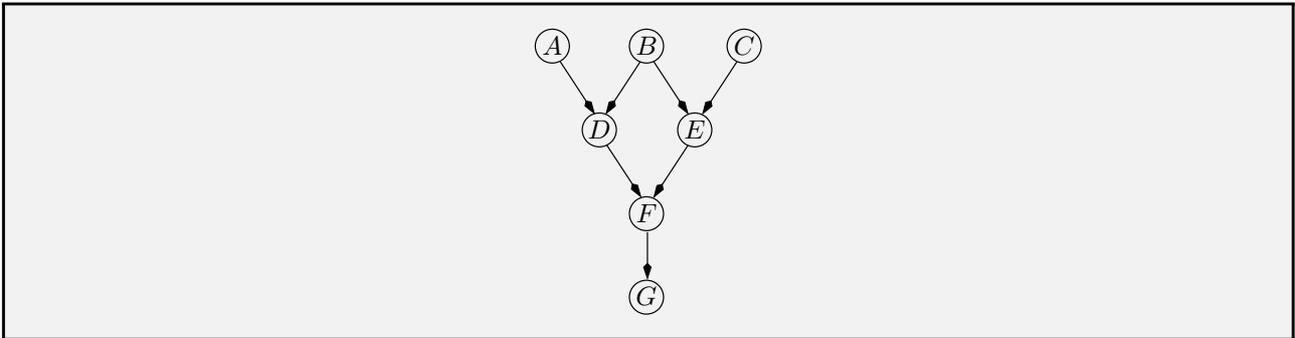
Durée : 3 heures

Exercice 1

La loi jointe des 7 v.a. (A, B, C, D, E, F, G) vérifie les relations d'indépendance suivantes :

$$B \perp\!\!\!\perp A ; \quad C \perp\!\!\!\perp (A, B) ; \quad D \perp\!\!\!\perp C \mid (A, B) ; \quad E \perp\!\!\!\perp (A, D) \mid (B, C) ; \\ F \perp\!\!\!\perp (A, B, C) \mid (D, E) ; \quad G \perp\!\!\!\perp (A, B, C, D, E) \mid F.$$

a) Construire le graphe d'indépendance correspondant lorsque les variables sont rangées dans l'ordre A, B, C, D, E, F, G .



b) Qu'est-ce que le critère de d -séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$$A \perp\!\!\!\perp C \mid (D, E) ; \quad A \perp\!\!\!\perp C \mid (B, D, E) ; \quad A \perp\!\!\!\perp C \mid G ; \quad A \perp\!\!\!\perp C \mid (B, D, E, F).$$

D'après le critère de d -séparation :

$NON[A \mid d \mid C / (D, E)]$, car la chaîne $ADBEC$ est active ; il en résulte, d'après Pearl & Verma, que $NON[A \perp\!\!\!\perp C \mid (D, E)]$ dans presque toutes les lois jointes décomposables selon le graphe.

$A \mid d \mid C / (B, D, E)$ car $ADBEC$ est bloquée en B et $ADFEC$ est bloquée en F ; d'où, $A \perp\!\!\!\perp C \mid (B, D, E)$.

$NON[A \mid d \mid C / G]$, car la chaîne $ADFEC$ est active (G est descendant de F) ; il en résulte que $NON[A \perp\!\!\!\perp C \mid G]$ dans presque toutes les lois jointes décomposables selon le graphe.

$A \mid d \mid C / (B, D, E, F)$ car $ADBEC$ est bloquée en B et $ADFEC$ est bloquée en D et en E ; d'où, $A \perp\!\!\!\perp C \mid (B, D, E, F)$.

c) À l'aide des propriétés générales de la relation d'indépendance conditionnelle, démontrer la validité de l'assertion :

$$D \perp\!\!\!\perp (C, E) \mid (A, B).$$

D'après les propriétés générales de la relation d'indépendance conditionnelle :

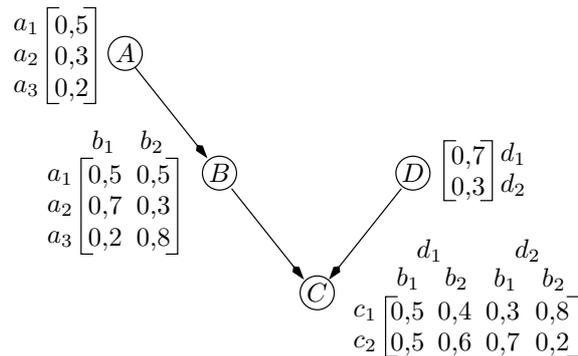
$$E \perp\!\!\!\perp (A, D) \mid (B, C) \implies_{\text{UNFAIBLE}} E \perp\!\!\!\perp D \mid (A, B, C)$$

$$E \perp\!\!\!\perp D \mid (A, B, C) \implies_{\text{SYM}} D \perp\!\!\!\perp E \mid (A, B, C)$$

$$\left. \begin{array}{l} D \perp\!\!\!\perp E \mid (A, B, C) \\ D \perp\!\!\!\perp C \mid (A, B) \end{array} \right\} \implies_{\text{CONT}} D \perp\!\!\!\perp (C, E) \mid (A, B).$$

Exercice 2

On considère le réseau bayésien suivant :



- 1) En utilisant la méthode de Pearl, calculez les probabilités *a priori* de tous les nœuds du réseau.
- 2) Soit e_A l'information « A ne peut plus prendre la valeur a_1 ». Propagez cette information dans le réseau et calculez les probabilités *a posteriori* de chacun des nœuds.
- 3) Aurait-on pu prévoir la valeur de $P(D|e_A)$ sans faire de calcul ? Si oui, pourquoi ?

Exercice 3

On s'intéresse à l'effet d'un certain traitement sur la rapidité de guérison d'une maladie virale. Les données hospitalières, portant sur 197 patients, sont résumées par le tableau suivant :

	g	\bar{g}
t	[48	53]
\bar{t}	[56	40]

où $\begin{cases} T = t, & \text{si le malade reçoit le traitement, } T = \bar{t} \text{ sinon} \\ G = g, & \text{si le malade guérit en moins de 8 jours, } G = \bar{g} \text{ sinon.} \end{cases}$

On estime les probabilités $p(t, g) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(T = t, G = g)$, etc., par les fréquences relatives observées données ci-dessus.

1°) Le traitement est considéré comme efficace dans la population étudiée lorsque :

$$p(g/t) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(G = g/T = t) > p(g/\bar{t}) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(G = g/T = \bar{t}).$$

L'est-il ?

$[p(t, g)] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} g & \bar{g} \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ \bar{t} \end{array} & \begin{bmatrix} 0,244 & 0,269 \\ 0,284 & 0,203 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{l} [p(g/t)] = \begin{array}{cc} g & \bar{g} \\ [0,476 & 0,524] \\ [p(g/\bar{t})] = [0,583 & 0,417] \end{array} \end{array}$
<p>Le traitement paraît inefficace dans la population totale puisque</p>	

$$p(g/t) = 48/101 = 0,476 < p(g/\bar{t}) = 56/96 = 0,583.$$

2°) On dispose en fait de données plus précises, permettant de répartir les patients en deux catégories d'âge : $A = a$, si le malade est un adulte, $A = \bar{a}$ si c'est un enfant. Les tableaux correspondants sont les suivants :

	g	\bar{g}		g	\bar{g}
Lorsque $A = a$:	t	[28 45]	Lorsque $A = \bar{a}$:	t	[20 8]
	\bar{t}	[8 15]		\bar{t}	[48 25]

Les probabilités sont encore estimées par les fréquences relatives observées. On note $p(g/t, a) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(G = g/T = t, A = a)$, etc. Le traitement apparaît-il comme efficace dans chacune des sous-populations, c.-à-d. a-t-on :

$$p(g/t, a) > p(g/\bar{t}, a) ? \quad p(g/t, \bar{a}) > p(g/\bar{t}, \bar{a}) ?$$

Que constate-t-on ? Par quelle relation $p(g/t)$ est-elle reliée à $p(g/t, a)$ et $p(g/t, \bar{a})$? Par quelle relation $p(g/\bar{t})$ est-elle reliée à $p(g/\bar{t}, a)$ et $p(g/\bar{t}, \bar{a})$? Commentez.

A partir des données par catégories d'âge ($A = a$, si le malade est un adulte, $A = \bar{a}$ si c'est un enfant) on construit les tableaux suivants :

		$A = a :$			
		g	\bar{g}		
$[p(t, g/a)] =$	t	[0,291 0,469]	$[p(g/t, a)] =$	g	\bar{g}
	\bar{t}	[0,083 0,156]		$[p(g/\bar{t}, a)] =$	[0,347 0,653]
		$A = \bar{a} :$			
		g	\bar{g}		
$[p(t, g/\bar{a})] =$	t	[0,198 0,079]	$[p(g/t, \bar{a})] =$	g	\bar{g}
	\bar{t}	[0,475 0,247]		$[p(g/\bar{t}, \bar{a})] =$	[0,658 0,342]

Le traitement apparaît comme efficace dans chacune des deux sous-populations :

$$p(g/t, a) > p(g/\bar{t}, a) \quad \text{et} \quad p(g/t, \bar{a}) > p(g/\bar{t}, \bar{a}).$$

C'est un exemple du paradoxe de SIMPSON. Cette apparente contradiction entre les conclusions tirées de l'échantillon et celles tirées des deux sous-échantillons s'explique par le fait que :

$$p(g/t) = p(a/t)p(g/t, a) + p(\bar{a}/t)p(g/t, \bar{a}) \quad \text{alors que :}$$

$$p(g/\bar{t}) = p(a/\bar{t})p(g/\bar{t}, a) + p(\bar{a}/\bar{t})p(g/\bar{t}, \bar{a}),$$

donc que l'on fait des moyennes pondérées avec des poids différents, ce qui n'implique pas de conservation des inégalités.

3°a) Quel est le graphe d'indépendance Γ obtenu pour l'ordre d'énumération ATG des variables ?

3°b) On suppose qu'intervenir sur T en imposant $T = t$ a pour effet :

- i) de supprimer dans Γ le lien entre A et T ;
- ii) de mettre pour loi de probabilité décomposable selon le nouveau graphe Γ' la loi $q(\cdot)$ donnée par :

$$\begin{cases} q(a', t, g') = p(a')p(g'/t, a') \\ q(a', \bar{t}, g') = 0 \end{cases} \quad \text{pour } a' \in \{a, \bar{a}\} \text{ et } g' \in \{g, \bar{g}\}.$$

Donner l'expression de la probabilité conditionnelle par intervention $p(g \parallel t) \stackrel{\text{DEF}}{=} q(g/t)$ en fonction de $p(g/t, a)$ et $p(g/t, \bar{a})$; calculer de même $p(g \parallel \bar{t})$, correspondant à l'intervention imposant $T = \bar{t}$. Pourquoi le paradoxe a-t-il disparu ?

La probabilité conditionnelle par intervention $T = t$ est :

$$p(g \parallel t) \stackrel{\text{DEF}}{=} q(g/t) = q(a/t)q(g/t, a) + q(\bar{a}/t)q(g/t, \bar{a});$$

or, puisque, dans Γ' , $A \perp\!\!\!\perp T$,

$$q(a/t) = q(a) = \sum_{t,g} q(a, t, g) = p(a) \sum_{t,g} p(g/t, a') = p(a)$$

$$\text{et } q(g/t, a) = \frac{q(a, t, g)}{q(a, t)} = \frac{q(a, t, g)}{q(a)q(t)} = p(g/t, a);$$

de même, $q(\bar{a}/t) = p(\bar{a})$ et $q(g/t, \bar{a}) = p(g/t, \bar{a})$;

d'où : $p(g \parallel t) = p(a)p(g/t, a) + p(\bar{a})p(g/t, \bar{a})$; d'où $p(g \parallel t) = 0,553$.

On montrerait de même que :

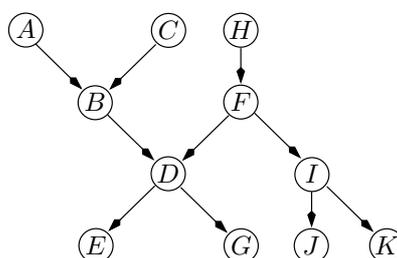
$$p(g \parallel \bar{t}) = p(a)p(g/\bar{t}, a) + p(\bar{a})p(g/\bar{t}, \bar{a}) ; p(g \parallel \bar{t}) = 0,506.$$

Cette fois-ci, les poids sont les mêmes et l'on vérifie bien que de l'efficacité du traitement sur les adultes comme sur les enfants il découle bien l'efficacité du traitement en général ; son intensité apparaît dans la comparaison :

$$p(g \parallel t) = 0,553 > p(g \parallel \bar{t}) = 0,506.$$

Exercice 4

Soit le réseau bayésien ci-dessous :



- 1) Moralisez ce réseau.
- 2) Triangulez le graphe moral en utilisant la séquence d'élimination suivante : $A, K, I, J, G, H, C, D, B, F, E$. Vous indiquerez pour chaque nœud éliminé le graphe non orienté obtenu après élimination.
- 3) Dessinez un arbre de jonction correspondant à cette séquence d'élimination et indiquez à côté des cliques les probabilités conditionnelles que vous stockerez dans ces cliques.
- 4) Indiquez les contenus des messages transitant dans les deux sens des arêtes sur chaque séparateur pour le calcul des probabilités *a priori* par l'algorithme de Shafer-Shenoy.
- 5) Montrer que, quel que soit l'arbre de jonction et quelles que soient deux cliques voisines C_i et C_j d'intersection S_{ij} , les variables de $C_i \setminus S_{ij}$ sont indépendantes de $C_j \setminus S_{ij}$ conditionnellement à S_{ij} . S_{ij} sépare l'arbre de jonction en deux sous-arbres T_1 et T_2 . Montrez que les variables de $T_1 \setminus S_{ij}$ sont indépendantes de $T_2 \setminus S_{ij}$ conditionnellement à S_{ij} .
- 6) En utilisant la d -séparation, montrez que la propagation d'une information e_A concernant A dans l'arbre de jonction obtenu en 4) ne nécessite le calcul que de deux nouveaux messages.