

Examen du module MGDE

Durée : 3 heures

Exercice 1

La loi jointe des 7 v.a. (A, B, C, D, E, F, G) vérifie les relations d'indépendance suivantes :

$$B \perp\!\!\!\perp A ; \quad C \perp\!\!\!\perp (A, B) ; \quad D \perp\!\!\!\perp C \mid (A, B) ; \quad E \perp\!\!\!\perp (A, D) \mid (B, C) ; \\ F \perp\!\!\!\perp (A, B, C) \mid (D, E) ; \quad G \perp\!\!\!\perp (A, B, C, D, E) \mid F.$$

- a) Construire le graphe d'indépendance correspondant lorsque les variables sont rangées dans l'ordre A, B, C, D, E, F, G .
- b) Qu'est-ce que le critère de d -séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

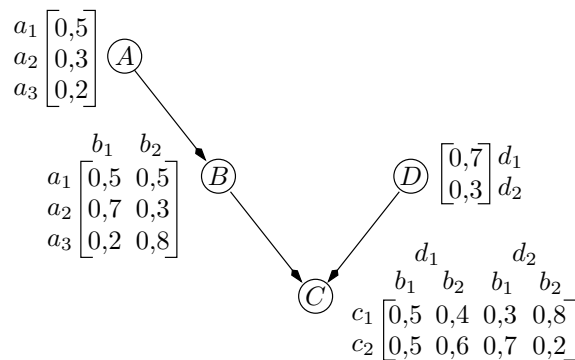
$$A \perp\!\!\!\perp C \mid (D, E) ; \quad A \perp\!\!\!\perp C \mid (B, D, E) ; \quad A \perp\!\!\!\perp C \mid G ; \quad A \perp\!\!\!\perp C \mid (B, D, E, F).$$

- c) À l'aide des propriétés générales de la relation d'indépendance conditionnelle, démontrer la validité de l'assertion :

$$D \perp\!\!\!\perp (C, E) \mid (A, B).$$

Exercice 2

On considère le réseau bayésien suivant :



- 1) En utilisant la méthode de Pearl, calculez les probabilités *a priori* de tous les nœuds du réseau.
- 2) Soit e_A l'information « A ne peut plus prendre la valeur a_1 ». Propagez cette information dans le réseau et calculez les probabilités *a posteriori* de chacun des nœuds.
- 3) Aurait-on pu prévoir la valeur de $P(D|e_A)$ sans faire de calcul ? Si oui, pourquoi ?

Exercice 3

On s'intéresse à l'effet d'un certain traitement sur la rapidité de guérison d'une maladie virale. Les données hospitalières, portant sur 197 patients, sont résumées par le tableau suivant :

$$\begin{array}{cc}
 & g & \bar{g} \\
 t & [48 & 53] \\
 \bar{t} & [56 & 40]
 \end{array}$$

où $\begin{cases} T = t, & \text{si le malade reçoit le traitement, } T = \bar{t} \text{ sinon} \\ G = g, & \text{si le malade guérit en moins de 8 jours, } G = \bar{g} \text{ sinon.} \end{cases}$

On estime les probabilités $p(t, g) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(T = t, G = g)$, etc., par les fréquences relatives observées données ci-dessus.

1°) Le traitement est considéré comme efficace dans la population étudiée lorsque :

$$p(g/t) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(G = g/T = t) > p(g/\bar{t}) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(G = g/T = \bar{t}).$$

L'est-il ?

2°) On dispose en fait de données plus précises, permettant de répartir les patients en deux catégories d'âge : $A = a$, si le malade est un adulte, $A = \bar{a}$ si c'est un enfant. Les tableaux correspondants sont les suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Lorsque } A = a : & \begin{array}{cc} g & \bar{g} \\ t & [28 & 45] \\ \bar{t} & [8 & 15] \end{array} & \text{Lorsque } A = \bar{a} : & \begin{array}{cc} g & \bar{g} \\ t & [20 & 8] \\ \bar{t} & [48 & 25] \end{array}
 \end{array}$$

Les probabilités sont encore estimées par les fréquences relatives observées. On note $p(g/t, a) \stackrel{\text{DEF}}{=} P(G = g/T = t, A = a)$, etc. Le traitement apparaît-il comme efficace dans chacune des sous-populations, c.-à-d. a-t-on :

$$p(g/t, a) > p(g/\bar{t}, a) ? \quad p(g/t, \bar{a}) > p(g/\bar{t}, \bar{a}) ?$$

Que constate-t-on ? Par quelle relation $p(g/t)$ est-elle reliée à $p(g/t, a)$ et $p(g/t, \bar{a})$? Par quelle relation $p(g/\bar{t})$ est-elle reliée à $p(g/\bar{t}, a)$ et $p(g/\bar{t}, \bar{a})$? Commentez.

3°a) Quel est le graphe d'indépendance Γ obtenu pour l'ordre d'énumération ATG des variables ?

3°b) On suppose qu'intervenir sur T en imposant $T = t$ a pour effet :

i) de supprimer dans Γ le lien entre A et T ;

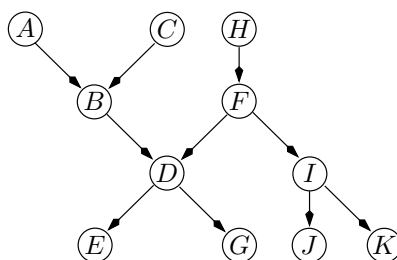
ii) de mettre pour loi de probabilité décomposable selon le nouveau graphe Γ' la loi $q(\cdot)$ donnée par :

$$\begin{cases} q(a', t, g') = p(a')p(g'/t, a') \\ q(a', \bar{t}, g') = 0 \end{cases} \quad \text{pour } a' \in \{a, \bar{a}\} \text{ et } g' \in \{g, \bar{g}\}.$$

Donner l'expression de la *probabilité conditionnelle par intervention* $p(g \parallel t) \stackrel{\text{DEF}}{=} q(g/t)$ en fonction de $p(g/t, a)$ et $p(g/t, \bar{a})$; calculer de même $p(g \parallel \bar{t})$, correspondant à l'intervention imposant $T = \bar{t}$. Pourquoi le paradoxe a-t-il disparu ?

Exercice 4

Soit le réseau bayésien ci-dessous :



- 1) Moralisez ce réseau.
- 2) Triangulez le graphe moral en utilisant la séquence d'élimination suivante : $A, K, I, J, G, H, C, D, B, F, E$. Vous indiquerez pour chaque nœud éliminé le graphe non orienté obtenu après élimination.
- 3) Dessinez un arbre de jonction correspondant à cette séquence d'élimination et indiquez à côté des cliques les probabilités conditionnelles que vous stockerez dans ces cliques.
- 4) Indiquez les contenus des messages transitant dans les deux sens des arêtes sur chaque séparateur pour le calcul des probabilités *a priori* par l'algorithme de Shafer-Shenoy.
- 5) Montrer que, quel que soit l'arbre de jonction et quelles que soient deux cliques voisines C_i et C_j d'intersection S_{ij} , les variables de $C_i \setminus S_{ij}$ sont indépendantes de $C_j \setminus S_{ij}$ conditionnellement à S_{ij} . S_{ij} sépare l'arbre de jonction en deux sous-arbres T_1 et T_2 . Montrez que les variables de $T_1 \setminus S_{ij}$ sont indépendantes de $T_2 \setminus S_{ij}$ conditionnellement à S_{ij} .
- 6) En utilisant la d -séparation, montrez que la propagation d'une information e_A concernant A dans l'arbre de jonction obtenu en 4) ne nécessite le calcul que de deux nouveaux messages.