Diagrammes d’influence et CP-nets

Christophe Gonzales

LIP6 – Paris 6 Université, France

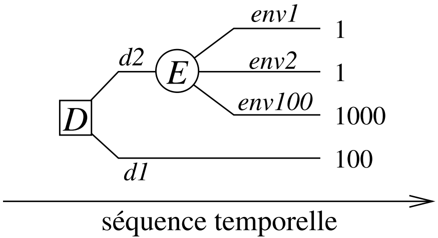
Plan du cours 3

1. Les arbres de décision
2. Les diagrammes d'influence
3. Les CP-nets

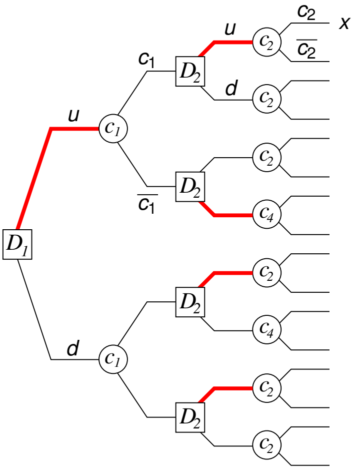
Exemple

- enveloppe 1 contient 100 €
- enveloppe 2 choisie parmi une pile de 100 enveloppes dont 3 contiennent 1000 € et 97 contiennent 1 €

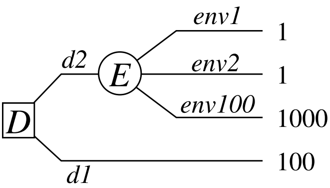
$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{enveloppe 1 = 100 €} \\ \text{enveloppe 2 = 3 chances sur 100 d'avoir 1000 € et} \\ \qquad\qquad\quad\ \text{97 chances sur 100 d'avoir 1 €} \end{cases}$$



carrés = décisions ronds = nœuds de chance



x = conséquence si $D_1 = u$, $C_1 = c_1$, $D_2 = u$, $C_2 = c_2$



$\Rightarrow$ la décision optimale est celle dont la moyenne des utilités des conséquences est la plus élevée

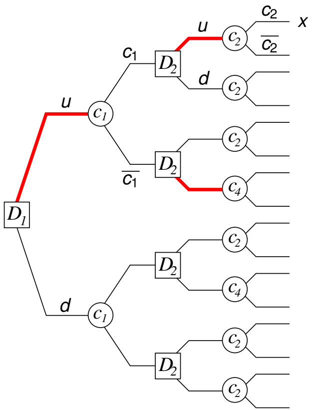
$d_1 \equiv$ loterie $L_1 = \langle 100, 1 \rangle$
$d_2 \equiv$ loterie $L_2 = \langle 1, 0.97; \;\; 1000, 0.03 \rangle$

$EU(d_1) = EU(L_1) = 100$
$EU(d_2) = EU(L_2) = 0,97 \times 1 + 0,03 \times 1000 = 30,97$

$\Longrightarrow$ décision optimale selon EU : d_1

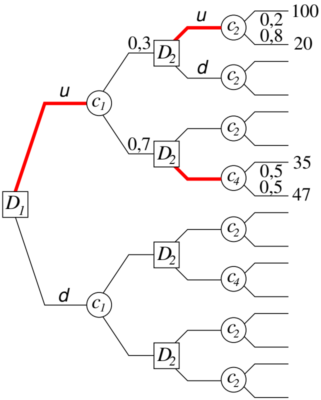
Stratégie

Une stratégie de décision = la sélection en tout sommet de décision *D* de l'arbre accessible compte tenu des décisions prises précédemment, d'une décision *d* appartenant à l'ensemble des décisions réalisables de ce sommet.

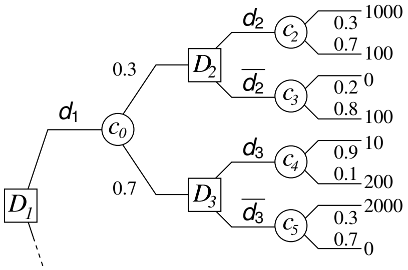


Stratégie et espérance d'utilité

- À toute stratégie correspond une loterie
- critère d'optimalité = espérance max sur les loteries

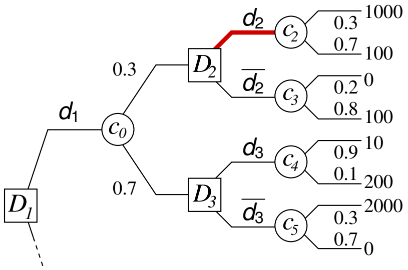


loterie = $\langle 20,\ 0.24;\ \ 35,\ 0.35;\ \ 47,\ 0.35;\ \ 100,\ 0.06\rangle$



$$\text{Stratégie } S_1 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = d_3 \rangle\rangle$$
$$\equiv \langle 10, 0.7 \times 0.9;\ 100, 0.3 \times 0.7,\ 200, 0.7 \times 0.1,\ 1000, 0.3 \times 0.3 \rangle$$
$$E(S_1) = 0.3 \times [0.7 \times 100 + 0.3 \times 1000] + 0.7 \times [0.9 \times 10 + 0.1 \times 200]$$
$$= 0.3 \times E\left(\langle\langle D_2 = d_2 \rangle\rangle\right) + 0.7 \times E\left(\langle\langle D_3 = d_3 \rangle\rangle\right)$$

$$\text{Stratégie } S_2 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = \overline{d_3} \rangle\rangle$$
$$\equiv \langle 0, 0.7 \times 0.7;\ 100, 0.3 \times 0.7,\ 1000, 0.3 \times 0.3,\ 2000, 0.7 \times 0.3 \rangle$$
$$E(S_2) = 0.3 \times [0.7 \times 100 + 0.3 \times 1000] + 0.7 \times [0.7 \times 0 + 0.3 \times 2000]$$
$$= 0.3 \times E\left(\langle\langle D_2 = d_2 \rangle\rangle\right) + 0.7 \times E\left(\langle\langle D_3 = \overline{d_3} \rangle\rangle\right)$$



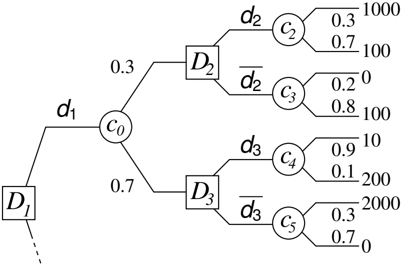
Stratégie $S_1 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = d_3\rangle\rangle$

$E(S_1) = 0.3 \times E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle) + 0.7 \times E(\langle\langle D_3 = d_3\rangle\rangle)$

Stratégie $S_2 = \langle\langle D_1 = d_1, D_2 = d_2, D3 = \overline{d_3}\rangle\rangle$

$E(S_2) = 0.3 \times E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle) + 0.7 \times E(\langle\langle D_3 = \overline{d_3}\rangle\rangle)$

$\Longrightarrow$ calculer $E(\langle\langle D_2 = d_2\rangle\rangle)$ une seule fois, stocker le résultat en D_2 et le réutiliser pour toute stratégie contenant $D_2 = d_2$



Problème : Doit-on stocker en D_2 les 2 espérances $E(\langle\langle D_2 = d_2 \rangle\rangle)$ et $E(\langle\langle D_2 = \overline{d_2} \rangle\rangle)$?

Soit $S_1 = \langle\langle D_1 = d_1, \ldots, D_2 = d_2 \rangle\rangle$ et $S_2 = \langle\langle D_1 = d_1, \ldots, D_2 = \overline{d_2} \rangle\rangle$ deux stratégies ne différant que par la décision D_2

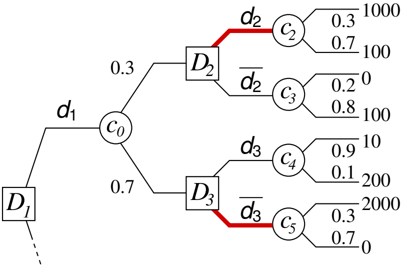
Alors $E(S_1) - E(S_2) = E(\langle\langle D_2 = d_2 \rangle\rangle) - E(\langle\langle D_2 = \overline{d_2} \rangle\rangle)$

$\Longrightarrow$ Si $E(\langle\langle D_2 = d_2 \rangle\rangle) \geq E(\langle\langle D_2 = \overline{d_2} \rangle\rangle)$ alors $E(S_1) \geq E(S_2)$

$\Longrightarrow$ ne conserver que $E(\langle\langle D_2 = d_2 \rangle\rangle)$ dans le nœud D_2

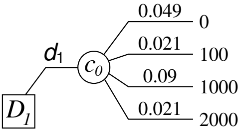
Calculs dans un arbre de décision (4/5)

$\Longrightarrow$ sur les nœuds de décision « terminaux », ne conserver que les meilleures décisions :



$\Longrightarrow$ Si on choisit $D_1 = d_1$, la sous-stratégie optimale est forcément : $D_2 = d_2$, $D_3 = d_3$ qui correspond à la loterie :

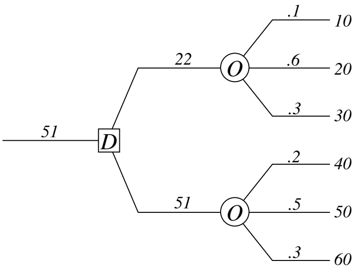
$$\langle 0,\ 0.49;\ \ 100,\ 0.21;\ \ 1000,\ 0.09;\ \ 2000,\ 0.21 \rangle$$



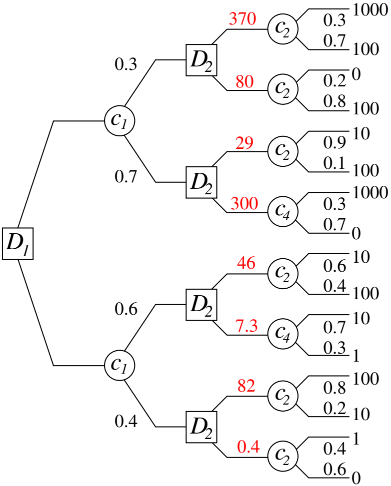
puis réitérer le process...

Règle de calcul dans l'arbre de décision

1. si le nœud est un nœud de chance, on calcule une espérance
2. si le nœud est un nœud de décision, on conserve le max

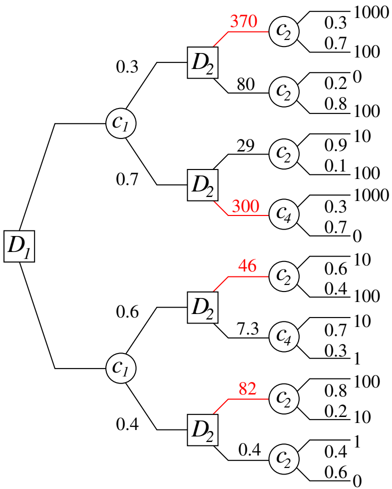


Méthode de calcul = inférence arrière

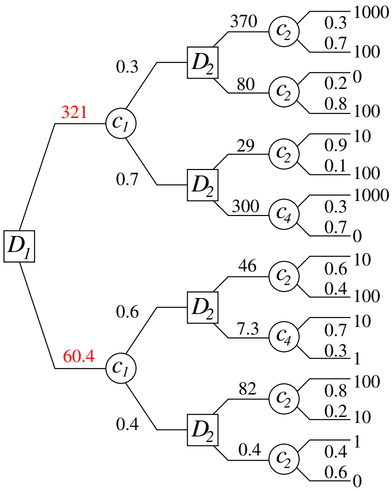


$$\text{calcul : } EU(C_2) = \sum_{C_2} P(C_2 | D_1, C_1, D_2) u(D_1, C_1, D_2, c_2)$$

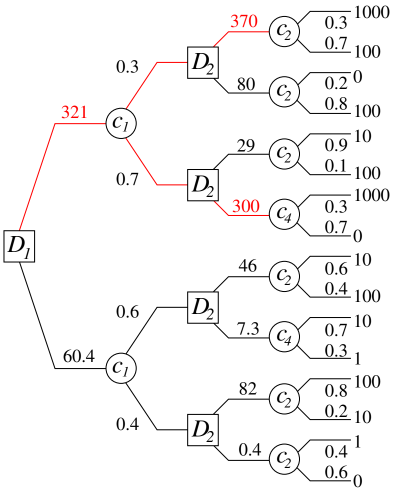
Exemple d'inférence dans un arbre de décision (2/4)



calcul : $EU(D_2) = \max_{D_2} EU(C_2)$



calcul : $EU(C_1) = \sum_{C_1} P(C_1|D_1)EU(D_2)$



calcul : $EU(D_1) = \max_{D_1} EU(C_1)$

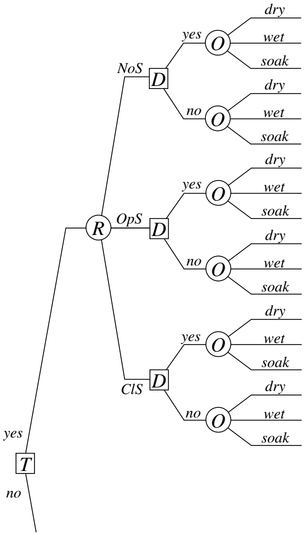
Exemple classique de Raiffa (1968)

An oil wildcatter must decide either to drill (yes) or not drill (no). He is uncertain whether the hole is dry (Dry), wet (Wet) or soaking (Soak). At a cost of 10000$, the wildcatter could take seismic soundings which help determine the geological structure at the site. The soundings will disclose whether the terrain below has no structure (NoS), that's bad, or open structure (OpS), or closed structure (ClS), (which is hopeful).

$\Longrightarrow$ deux nœuds de décisions : test (T), forer (D)

$\Longrightarrow$ deux nœuds de chance : résultat du test (R), quantité de pétrole (O)

Exemple d'arbre de décision (2/2)



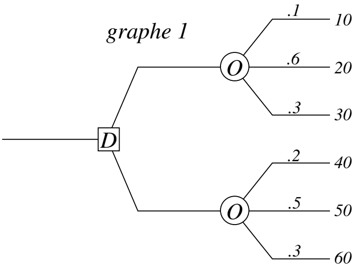
Problèmes des arbres de décision

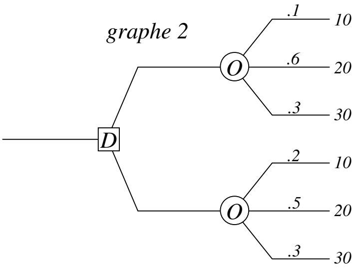
1. Les arbres sont trop compliqués pour le décideur
   $\Longrightarrow$ on ne voit pas la structure du problème

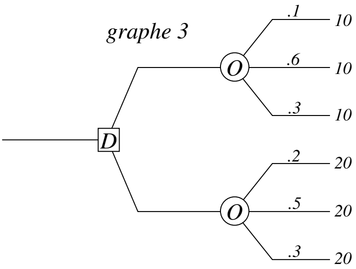
2. Les tables de probabilité dont on a besoin dans l'arbre ne sont pas forcément celles que l'on possède.

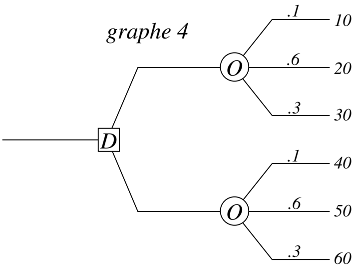
3. Il y a une explosion combinatoire au niveau des calculs
   $\Longrightarrow$ recherche des similitudes dans l'arbre

2. Les diagrammes d'influence

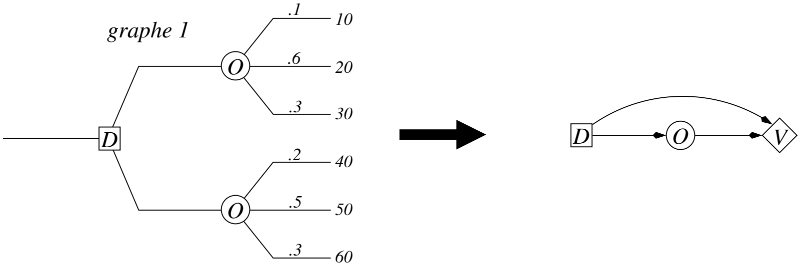

graphe 1
D
O
.1 10
.6 20
.3 30
O
.2 40
.5 50
.3 60

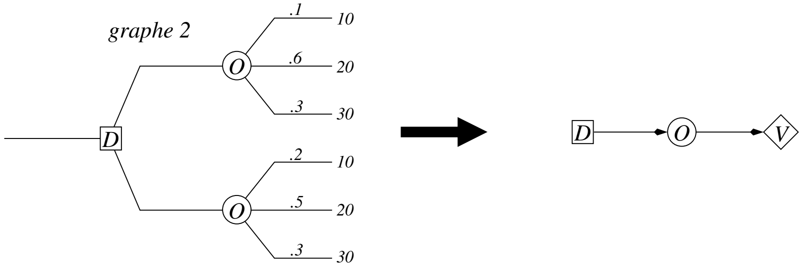

graphe 2
D
O
.1 10
.6 20
.3 30
O
.2 10
.5 20
.3 30

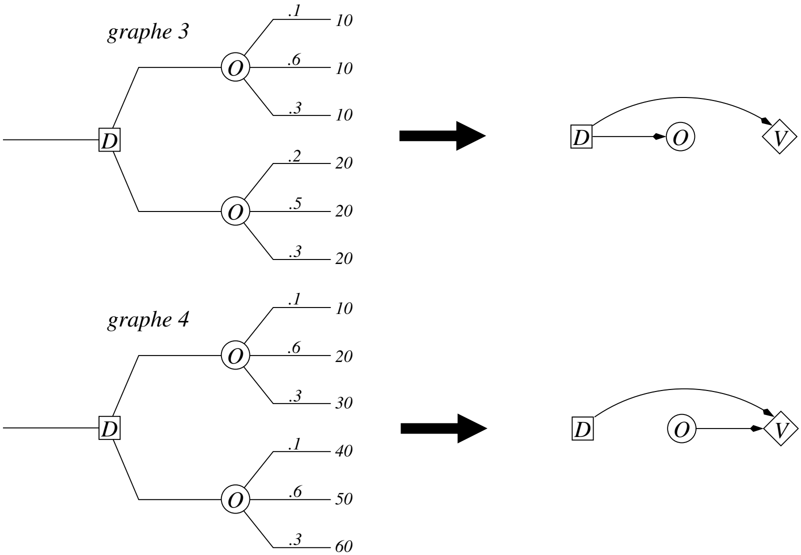

graphe 3
D
O
.1 10
.6 10
.3 10
O
.2 20
.5 20
.3 20


graphe 4
D
O
.1 10
.6 20
.3 30
O
.1 40
.6 50
.3 60

structure des arbres de décision (2/3)






graphe 3
D
O
O
.1
.6
.3
.2
.5
.3
10
10
10
20
20
20
D
O
V
graphe 4
D
O
O
.1
.6
.3
.1
.6
.3
10
20
30
40
50
60
D
O
V

Définition : diagramme d'influence

Un diagramme d'influence est un graphe orienté sans circuit (DAG) contenant trois types de nœuds :

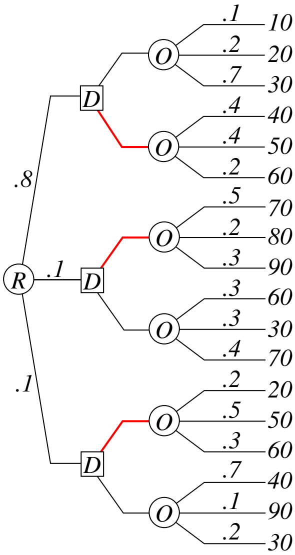
- des nœuds de décision (les carrés) ;
- des nœuds de chance (probabilités), les cercles ;
- des nœuds d'utilité (les losanges).

Les arcs vers les nœuds de décision D_i indiquent les infos connues par le décideur avant que la décision D_i ne soit prise. Tous les autres arcs indiquent des dépendances probabilistes.

Définition : réseau de valuation

Un réseau de valuation est un diagramme d'influence dans lequel on a supprimé les arcs entrant dans les nœuds de décision.

Pourquoi utiliser les réseaux de valuation ?



Plusieurs nœuds d'utilité (1/5)

Soit un arbre de décision dans lequel on a 4 nœuds de décision D_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, et 4 nœuds de chance c_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\rho_4 = \max_{D_4} \sum_{c_4} P(c_4 | D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4) \\ u(D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4, c_4)$$

$$\rho_3 = \max_{D_3} \sum_{c_3} P(c_3 | D_1, c_1, D_2, c_2, D_3) \\ \max_{D_4} \sum_{c_4} P(c_4 | D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4) \\ u(D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4, c_4)$$

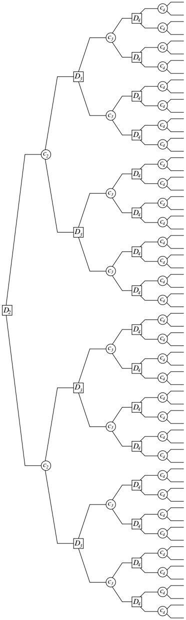
$$= \max_{D_3} \sum_{c_3} \max_{D_4} \sum_{c_4} P(c_3, c_4 | D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, D_4) \\ u(D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4, c_4)$$

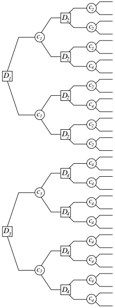
....

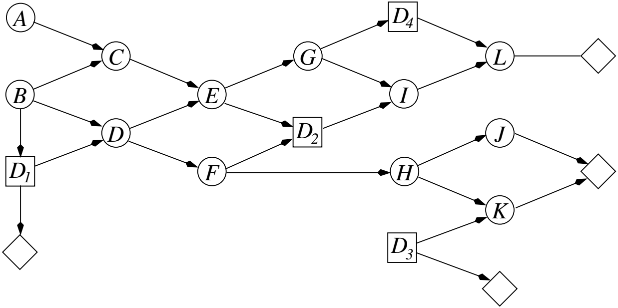
Plusieurs nœuds d'utilité (2/5)

- Si u se sépare en 2 utilités : $i = u_1 + u_2$,
  u_1 ne dépend que des décisions D_1, D_2, et de c_1, c_2,
  u_2 ne dépend que des décisions D_3, D_4, et de c_3, c_4,
- alors on peut améliorer les calculs.

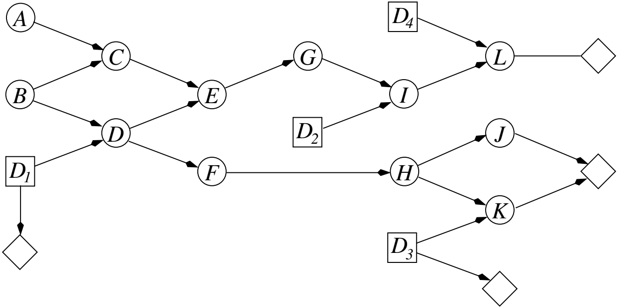
$$\begin{aligned}
\rho_4 &= \max_{D_4} \sum_{c_4} P(c_4|D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4) u(D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4, c_4) \\
&= \max_{D_4} \sum_{c_4} P(c_4|D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4) u_1(D_1, c_1, D_2, c_2) + \\
&\quad \max_{D_4} \sum_{c_4} P(c_4|D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4) u_2(D_3, c_3, D_4, c_4) \\
&= u_1(D_1, c_1, D_2, c_2) + \max_{D_4} \sum_{c_4} P(c_4|D_1, c_1, D_2, c_2, D_3, c_3, D_4) \\
&\qquad u_2(D_3, c_3, D_4, c_4)
\end{aligned}$$






A
B
C
D
D_1
E
F
G
D_2
D_4
H
I
J
K
L
D_3

Plusieurs nœuds d'utilité (5/5)



Détermination de la stratégie optimale

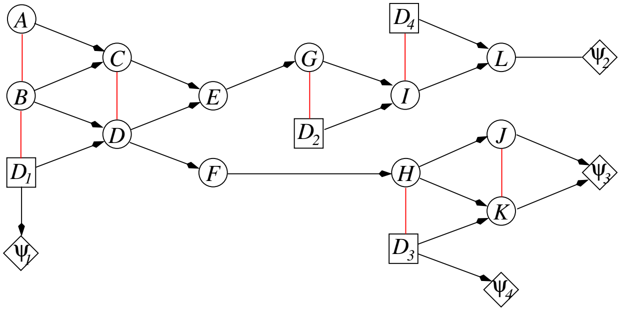
Procédure similaire aux calculs dans les réseaux bayésiens :

1. moraliser le réseau de valuation ;
2. supprimer les nœuds d'utilité (les lozanges) ;
3. trianguler le réseau obtenu ;
4. créer un arbre de jonction ;
5. effectuer les calculs dans l'arbre de jonction.

Problème : contrairement aux réseaux bayésiens, pour la triangulation, la séquence d'élimination des nœuds est partiellement déterminée par des contraintes temporelles.

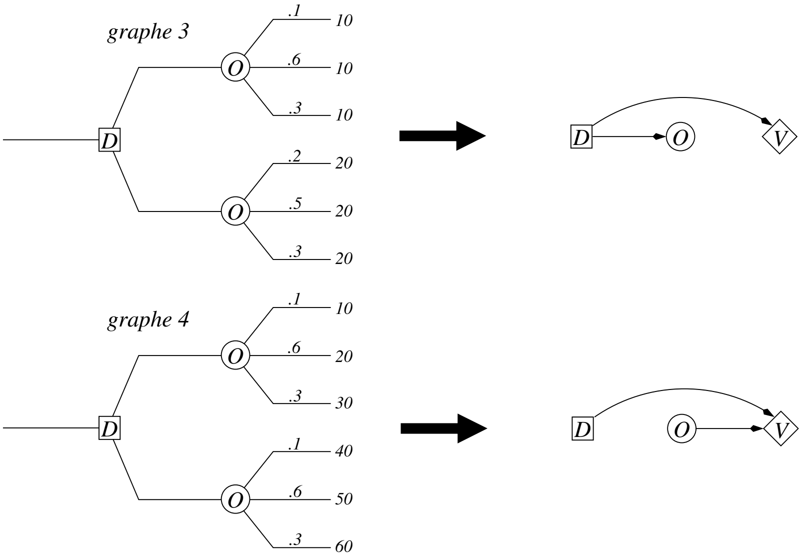
Moralisation

Relier entre eux tous les parents d'un même nœud (que ce soient des nœuds de chance ou de décision).



⚠ il faut partir du réseau de valuation ! ! !

Pourquoi doit-on être moral ?



La triangulation, ça a du bon (1/2)

Les contraintes temporelles

Appelons $D_1, \ldots, D_n$ les nœuds de décision
$C_1, \ldots, C_k$ les nœuds de chance

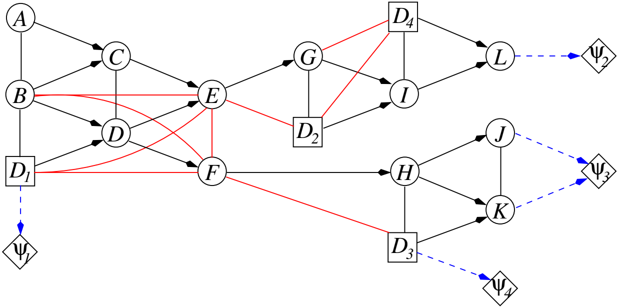
On peut partitionner $\{C_1, \ldots, C_k\}$ en des ensembles disjoints $I_0, I_1, \ldots, I_n$ tels que I_k est l'ensemble des nœuds de chance observables entre les décisions D_k et D_{k+1}.
Cela induit un ordre partiel « temporel » sur les nœuds :

$$I_0 \prec D_1 \prec I_1 \prec \cdots \prec D_n \prec I_n.$$

Triangulation

N'importe quelle séquence d'élimination respectant l'ordre partiel $\prec$ peut être utilisée (on doit d'abord éliminer les nœuds de I_n, puis de D_n, puis de I_{n-1}, etc).

- Après moralisation, on élimine les nœuds d'utilité ainsi que l'orientation des arcs.
- Ordre partiel : $\{B\} \prec D_1 \prec \{E, F\} \prec D_2 \prec \emptyset \prec D_3 \prec \{G\} \prec D_4 \prec \{A, C, D, H, I, J, K, L\}$
  $\Longrightarrow$ ordre d'élimination : $L, J, K, I, H, A, C, D, D_4, G,$
  D_3, D_2, F, E, D_1, B



L'arbre de jonction (1/2)

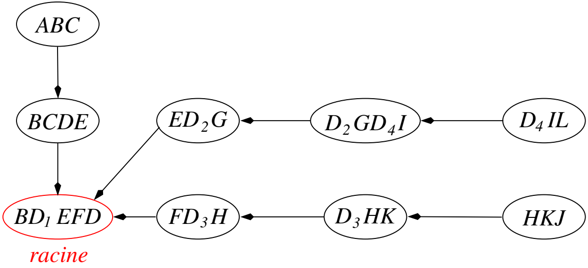
Strong junction tree

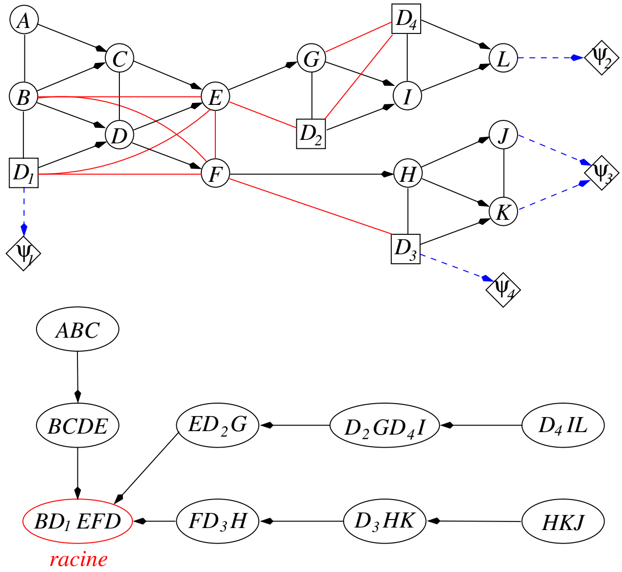
C'est un arbre de jonction (donc vérifiant la propriété d'intersection courante), possédant une clique R appelée racine telle que pour tout couple (C_1, C_2) de cliques adjacentes, C_1 étant plus près de R que C_2, il existe un ordre sur les nœuds de C_2 respectant l'ordre partiel $\prec$ tel que les nœuds du séparateur $C_1 \cap C_2$ précèdent ceux de $C_2 \backslash C_1$ selon cet ordre.

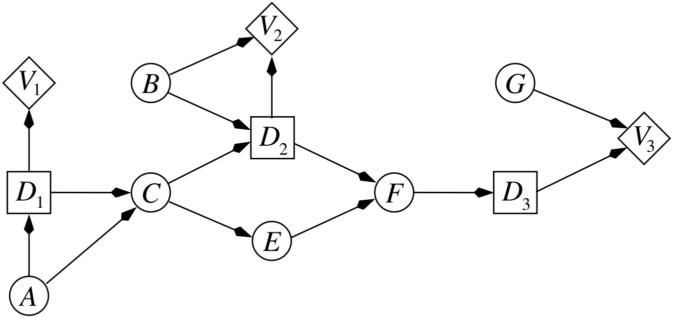
Proposition

Dans un strong junction tree, les messages locaux à la Jensen ou Shafer-Shenoy permettent de calculer le maximum d'espérance d'utilité.

Strong junction tree

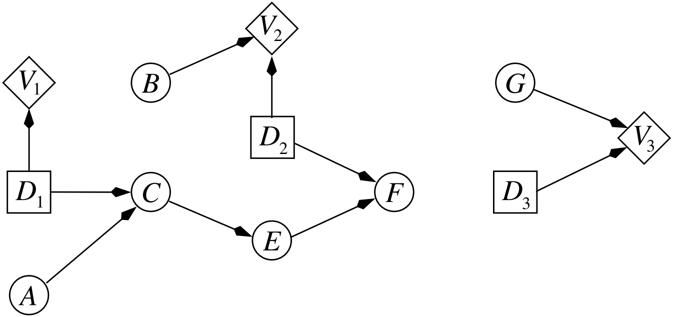



A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
D1
D2
D3
D4
Ψ1
Ψ2
Ψ3
Ψ4
ABC
BCDE
ED2G
D2GD4I
D4IL
BD1EFD
FD3H
D3HK
HKJ
racine

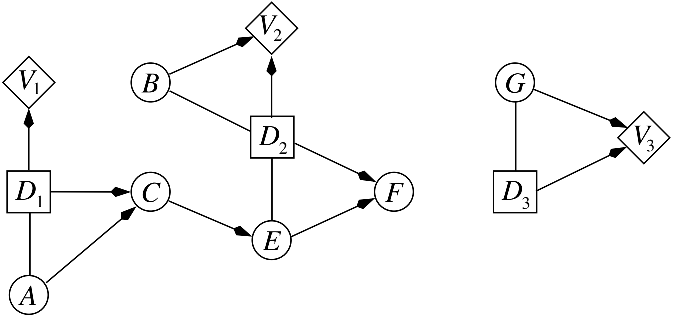


ordre temporel : $A \prec D_1 \prec \{B, C\} \prec D_2 \prec \{F\} \prec D_3 \prec \{E, G\}$

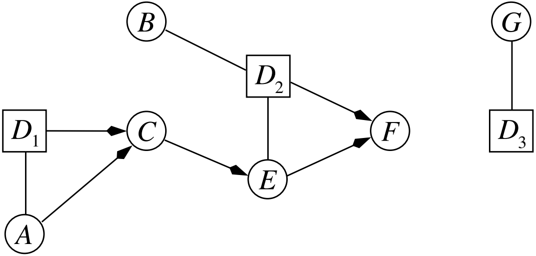
Création du réseau de valuation :



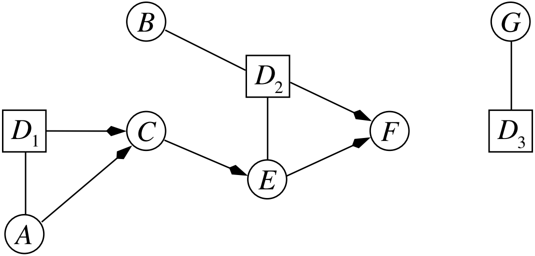
Moralisation du réseau de valuation :



Suppression des nœuds d'utilité :

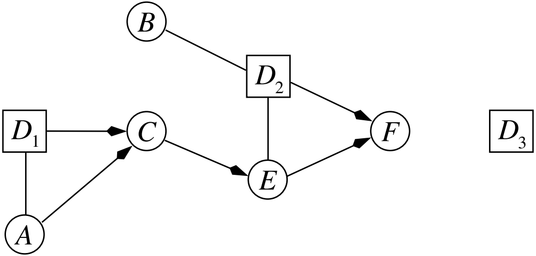


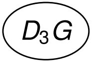
Triangulation : ordre : $A \prec D_1 \prec \{B, C\} \prec D_2 \prec \{F\} \prec D_3 \prec \{E, G\}$



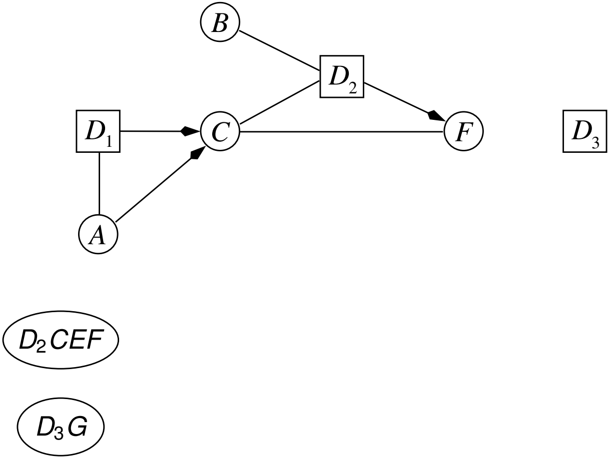
ordre compatible : $A \prec D_1 \prec C \prec B \prec D_2 \prec F \prec D_3 \prec E \prec G$

Suppression de G :

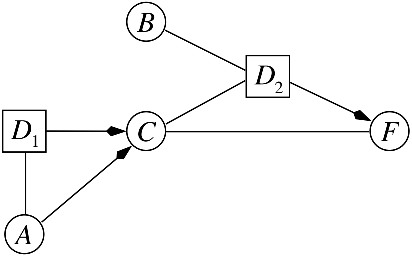


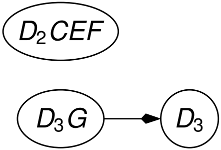


Suppression de E :

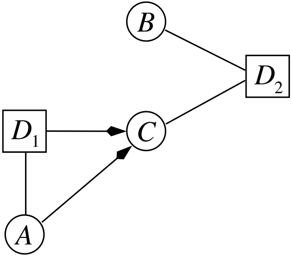


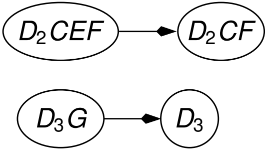
Suppression de D_3 :





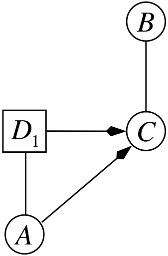
Suppression de F :

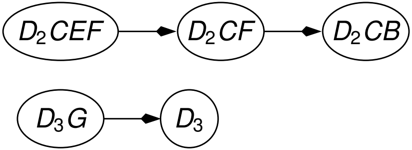




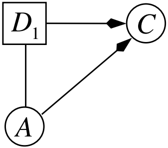
Exemple de construction d'un strong junction tree (10)

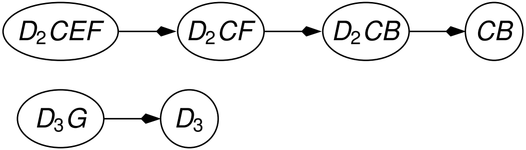
Suppression de D_2 :



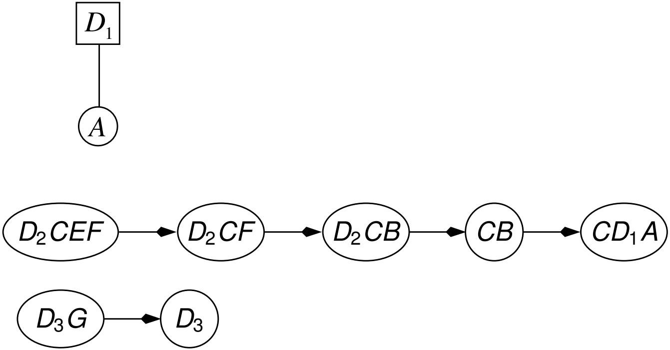


Suppression de B :

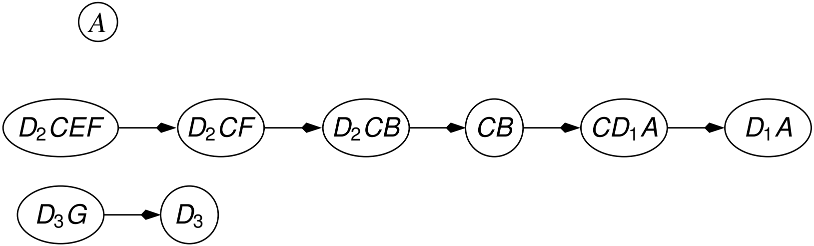




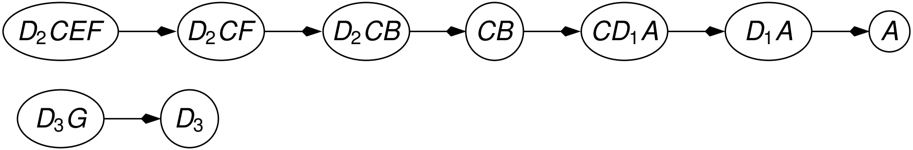
Suppression de C :



Suppression de D_1 :



Suppression de A :



Arbre d'élimination :

$$D_2CEF \to D_2CF \to D_2CB \to CB \to CD_1A \to D_1A \to A$$

$$D_3G \to D_3$$

Strong junction tree :

$$D_2CEF \to D_2CF \to D_2CB \to CD_1A$$

$$D_3G \to D_3$$

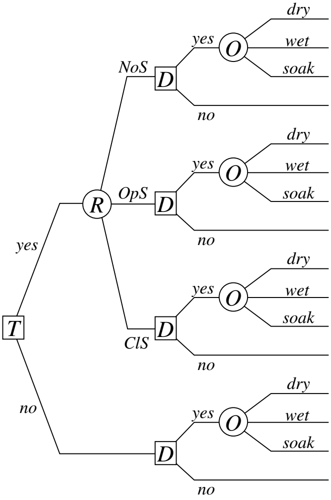
L'asymétrie, ça me scie

Exemple classique de Raiffa (1968)

An oil wildcatter must decide either to drill (yes) or not drill (no). He is uncertain whether the hole is dry (Dry), wet (Wet) or soaking (Soak). At a cost of 10000$, the wildcatter could take seismic soundings which help determine the geological structure at the site. The soundings will disclose whether the terrain below has no structure (NoS), that's bad, or open structure (OpS), or closed structure (ClS), (which is hopeful).

$\Longrightarrow$ deux noeuds de décisions : test (T), forer (D)

$\Longrightarrow$ deux noeuds de chance : résultat du test (R), quantité de pétrole (O)



Asymétrie (définition de Shenoy) :

Dans un arbre de décision, un chemin de la racine vers une feuille est appelé un scénario.
Un problème de décision est asymétrique si le nombre de scénarios est inférieur au produit du nombre d'états de toutes les variables.

Les arbres de décisions asymétriques (2/2)

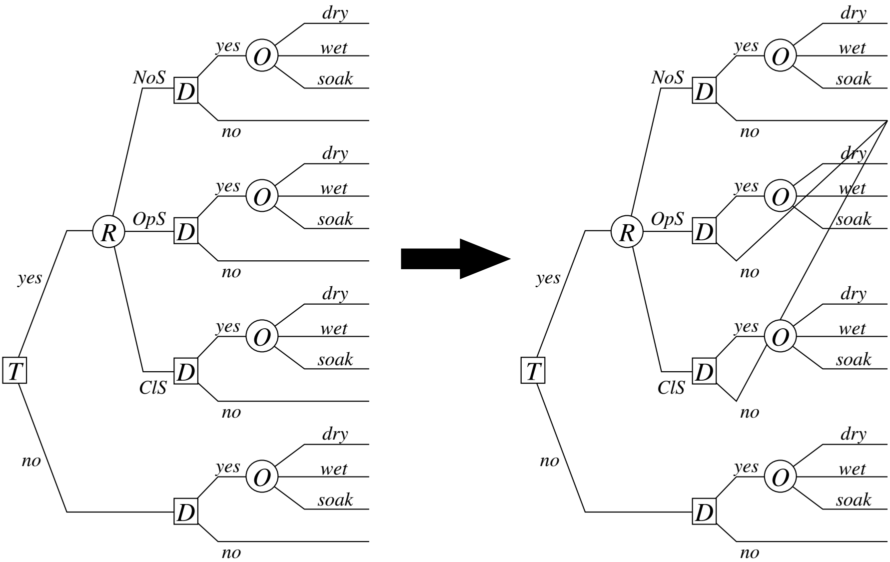
$\Longrightarrow$ l'asymétrie est encodée de manière $\ll$ naturelle $\gg$.

Avantage des arbres des décision : on ne rajoute pas de noeuds ou de valeurs factices (dummy nodes).

Problème : l'asymétrie est gérée de manière globale, pas locale

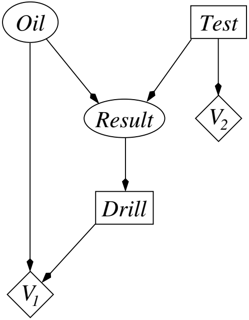
$\Longrightarrow$ il n'est pas facile de voir la structure du problème de décision.

$\Longrightarrow$ il n'est pas facile de retrouver les symétries restantes.


T
yes
no
R
NoS
OpS
ClS
D
O
yes
no
dry
wet
soak

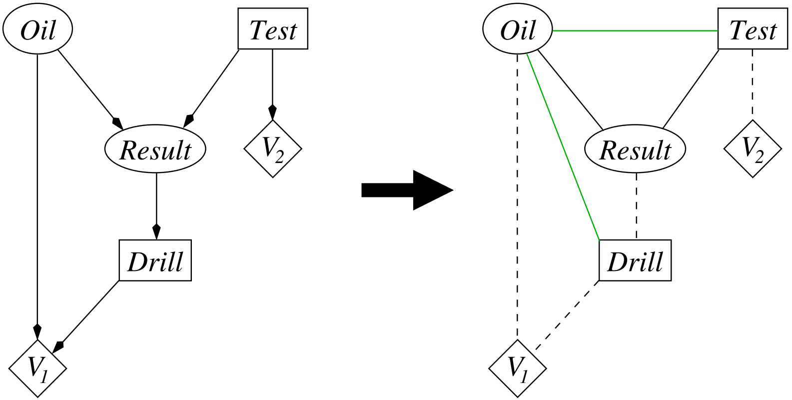
Plusieurs manières de traiter les asymétries

- Smith, Holtzman & Matheson (93) :
  Partie graphique : diagramme d'influence classique
  Distributions conditionnelles : décrites à l'aide d'un *distribution tree* (similaire à un arbre de décision).
- Factorisation des distributions conditionnelles (Cowell, Laurizten, Lauritzen , Spiegelhalter (99)).
- réseaux de valuation asymétriques (Shenoy, Jensen).

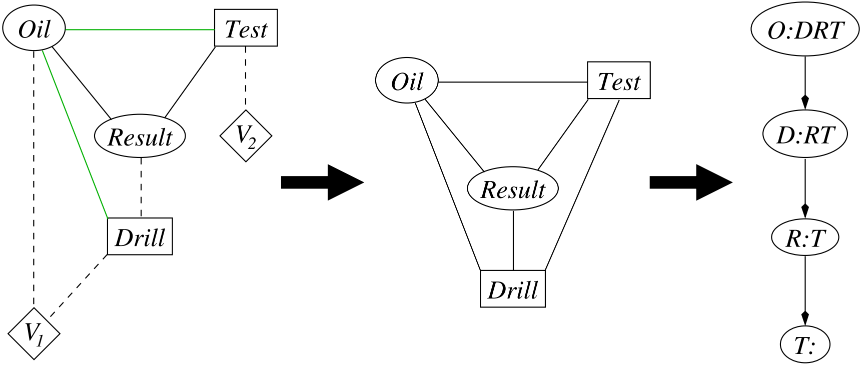


En principe, le noeud/variable *Result* ne devrait avoir que trois valeurs : *NoS*, *OpS* et *ClS*. Pour symétriser le diagramme, on peut rajouter une quatrième valeur : *NoResult*.

Construction du strong junction tree : 1/ on élimine les arcs entrant dans les noeuds de décision et on moralise.



Triangulation : séquence O, D, R, T



Dans la clique *ODRT*, on stocke la fonction d'utilité V_1 et la proba $P(R|O,T)$

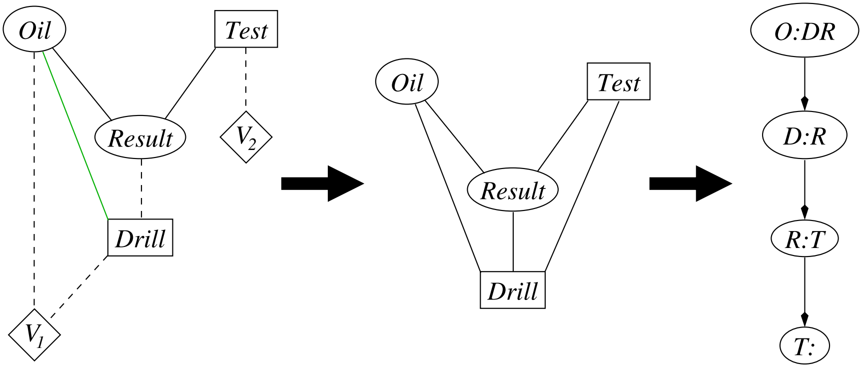
NoS	OpS	ClS	NoResult	Test	Oil
0,6	0,3	0,1	0	yes	dry
0,3	0,4	0,3	0		wet
0,1	0,4	0,5	0		soak
0	0	0	1	no	dry
0	0	0	1		wet
0	0	0	1		soak

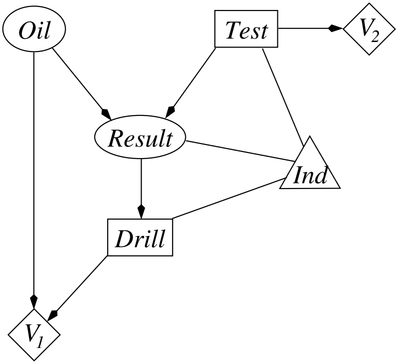
$\Longrightarrow P(R|O,T) = f(R,T)g(R,O)$:

T	NoS	OpS	ClS	NoResult
yes	1	1	1	0
no	0	0	0	1

O	NoS	OpS	ClS	NoResult
dry	0,6	0,3	0,1	1
wet	0,3	0,4	0,3	1
soak	0,1	0,4	0,5	1

$\Longrightarrow$ on n'a plus besoin de relier les noeuds *Test* et *Oil* par moralisation.
$\Longrightarrow$ le strong junction tree est :





Le triangle : appelé indicateur par Shenoy (double-triangle chez lui). Il représente la contrainte que le résultat du test n'est connu de la décision *Drill* que si le test a été effectué.

Les réseaux de valuation asymétriques (Shenoy 2/2)

Table stockée dans le noeud *Ind* : la liste des valeurs des triplets (*Test*,*Result*,*Drill*) admissibles.

$\Longrightarrow$ {(yes,NoS,yes), (yes,OpS,yes), (yes,ClS,yes), (yes,NoS,no), (yes,OpS,no), (yes,ClS,no), (no,NoResult,yes), (no,NoResult,no)}

$\Longrightarrow$ pour faire la propagation, on utilise l'algorithme de Shafer-Shenoy. On prend en compte l'indicateur en se limitant à ses triplets de valeurs.

Quelques références bibliographiques (symétrie)

- Howard, R.A. & Matheson, J.E. (1984) *Influence Diagrams*, dans Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis, vol 2, Howard, R.A. & Matheson, J.E. (eds), pp.719–762.
- Shachter, R. (1986) *Evaluating Influence Diagrams*, Operations Research, vol. 34, pp.871–882.
- Shenoy, P.P. (1992) *Valuation-based systems for Bayesian decision analysis*, Operations Research, vol 40, pp.463–484.
- Jensen, F. & Jensen, F.V. & Dittmer, S.L. (1994) *From Influence Diagrams to Junction Trees*, UAI-94.
- Cowell, R.G. & Dawid, A.P. & Lauritzen, S.L. & Speigelhalter, D.J. (1999) *Probabilistic Networks and Expert Systems*, Statistics for Engineering and Information Science, Springer.

Quelques références bibliographiques (asymétrie)

- Bielza, C & Shenoy, P.P (1999) A comparison of graphical techniques for asymmetric decision problems, Management Science, vol 45, pp.1552–1569.
- Shenoy, P.P. (2000) *Valuation network representation and solution of asymmetric decision problems*, European journal of Operations Research, vol 121, pp.579–608.
- Cowell, R.G. & Dawid, A.P. & Lauritzen, S.L. & Speigelhalter, D.J. (1999) *Probabilistic Networks and Expert Systems*, Statistics for Engineering and Information Science, Springer.
- Nielsen, T.D. & Jensen, F.V. (1999) *Welldefined Decision Scenarios*, UAI-99.
- Nielsen, T.D. & Jensen, F.V. (2000) *Representing and solving asymmetric Bayesian decision problems*, UAI-2000.

Modèle graphique pour des préférences ordinales

Rappel : Structure des préférences $\Longrightarrow$ indépendances

Indépendance préférentielle

- $I, J =$ une partition de $\{1, \ldots, n\}$, $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$
- $Y = \prod_{i \in I} X_i$ et $Z = \prod_{j \in J} X_j$.
- Y est préférentiellement indépendant de Z si et seulement si pour tout $y_1, y_2 \in Y, z_1, z_2 \in Z$,

$$(y_1, z_1) \succsim_X (y_2, z_1) \Longleftrightarrow (y_1, z_2) \succsim_X (y_2, z_2).$$

On dit alors que y_1 est préféré à y_2 *ceteris paribus*.

Indépendances conditionnelles (2/2)

Indépendance conditionnelle préférentielle

- I, J, K = une partition de $\{1, \ldots, n\}$, $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$, $K \neq \emptyset$.
- $Y = \prod_{i \in I} X_i$, $Z = \prod_{j \in J} X_j$ et $T = \prod_{k \in K} X_k$.
- Y est préférentiellement indépendant de Z conditionnellement à une valeur $t \in T$ si et seulement si pour tout $y_1, y_2 \in Y, z_1, z_2 \in Z$,

$$(y_1, t, \boxed{z_1}) \succsim_X (y_2, t, \boxed{z_1}) \Longleftrightarrow (y_1, t, \boxed{z_2}) \succsim_X (y_2, t, \boxed{z_2}).$$

Indépendance préférentielle de Y et Z conditionnellement à T

Y est préférentiellement indépendant de Z conditionnellement à T si et seulement si il l'est pour toute valeur $t \in T$.

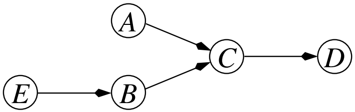
Définition : CP-net

Un CP-net est un graphe (pas forcément acyclique) tel que tout nœud/attribut est préférentiellement indépendant des autres nœuds/attributs conditionnellement à ses parents dans le graphe.

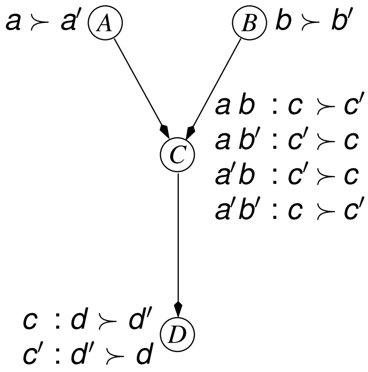
CP = Ceteris Paribus ou « Conditional preferential ».

$\Longrightarrow$ CP-net = notion ordinale

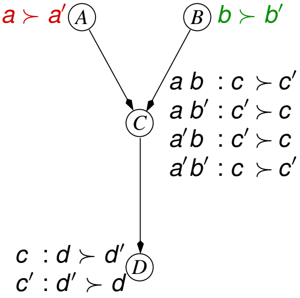
$$\left.\begin{array}{r} A \perp\!\!\!\perp (B, C, D, E) \\ E \perp\!\!\!\perp (A, B, C, D) \\ B \perp\!\!\!\perp (A, C, D) | E \\ C \perp\!\!\!\perp (D, E) | (A, B) \\ D \perp\!\!\!\perp (A, B, E) | C \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

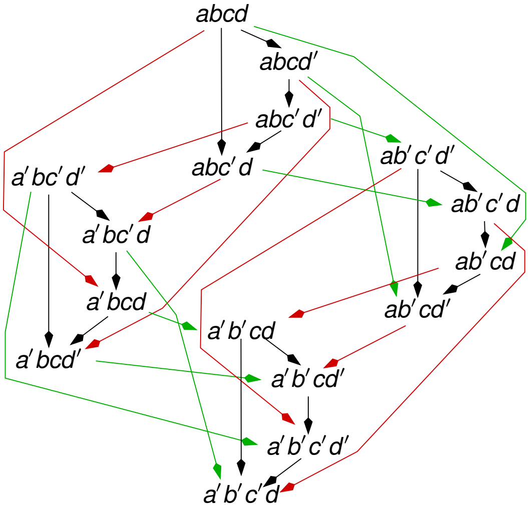


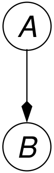
CP-nets (2/3)


$a \succ a'$
A
B
$b \succ b'$
C
$a\,b : c \succ c'$
$a\,b' : c' \succ c$
$a'\,b : c' \succ c$
$a'\,b' : c \succ c'$
$c : d \succ d'$
$c' : d' \succ d$
D

CP-nets (3/3)


$a \succ a'$
A
B
$b \succ b'$
C
$a\,b : c \succ c'$
$a\,b' : c' \succ c$
$a'\,b : c' \succ c$
$a'\,b' : c \succ c'$
D
$c : d \succ d'$
$c' : d' \succ d$


$abcd$
$abcd'$
$abc'd'$
$abc'd$
$a'bc'd'$
$ab'c'd'$
$ab'c'd$
$a'bc'd$
$ab'cd$
$a'bcd$
$ab'cd'$
$a'b'cd$
$a'bcd'$
$a'b'cd'$
$a'b'c'd'$
$a'b'c'd$



$a \succ a'$

$a : b \succ b'$
$a' : b' \succ b$

$\Longrightarrow ab \succ ab' \succ a'b' \succ a'b$

$\Longrightarrow$ obtenir a plutôt que a' est plus important qu'obtenir b plutôt que b' (ou b' plutôt que b)

$\Longrightarrow$ A est plus important que B

Dans un CP-net, les préférences sur les parents ont une priorité plus importante que celles sur les enfants

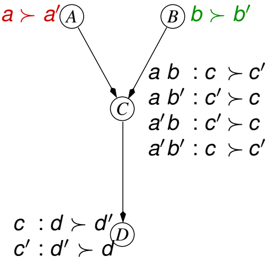
À quoi servent les CP-nets ?

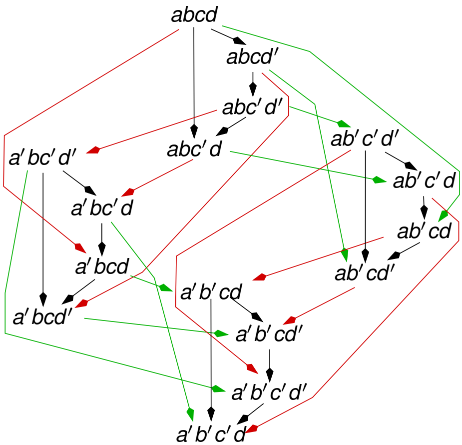
- optimisation : $\max_{\succsim_x}\{x\}$
- calculs de dominance : $x \overset{?}{\succsim_X} y$

Mais décision dans le risque/l'incertain $\Longrightarrow$ diagramme d'influence

- élicitation

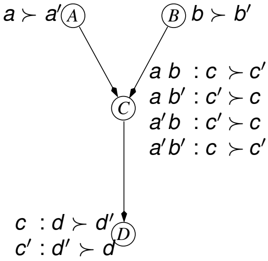
Optimisation avec les CP-nets

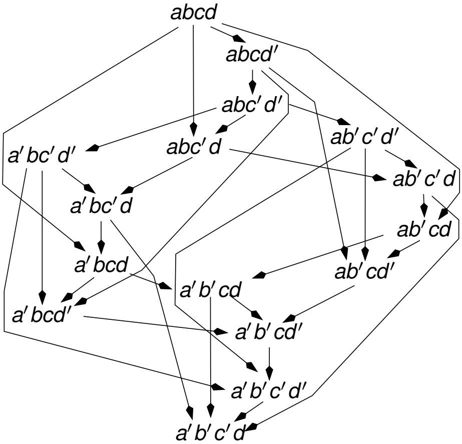




Algorithme pour déterminer l'élément préféré du décideur

1. Choisir la meilleure alternative pour les nœuds sans parents
2. Pour chaque nœud dont les parents ont été instanciés, choisir la meilleure alternative





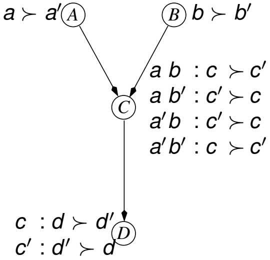
Définition : les flips

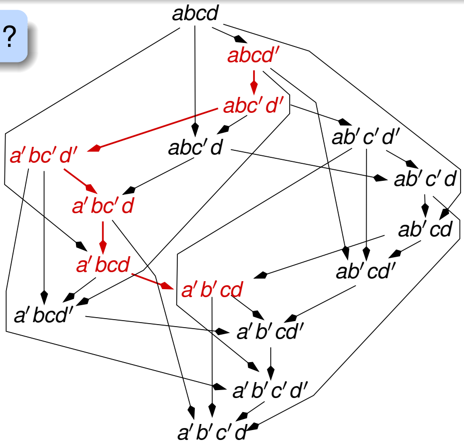
Pour tout arc $X \rightarrow Y$ du graphe des préférences en extension (à droite), X et Y ne diffèrent que par la valeur d'un seul attribut.

Passer de X à Y (ou de Y à X) s'appelle un flip.

Calcul de dominance avec les CP-nets (2/5)

Est-ce que $abcd' \succ a'b'cd$?



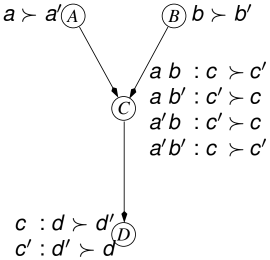


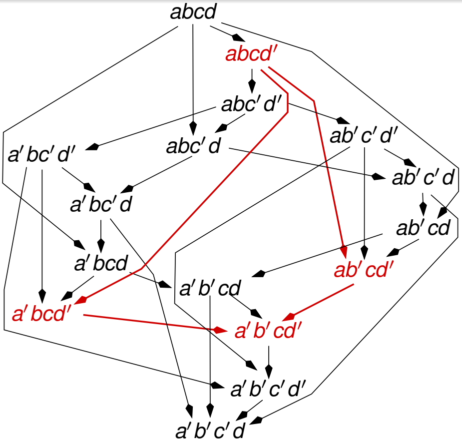
Algorithmes pour déterminer si $x \succ y$

1. Trouver une « séquence améliorante de flips » permettant de passer de y à x = un chemin que l'on remonte de y vers x
2. Trouver une « séquence détériorante de flips » permettant de passer de x à y = un chemin que l'on descend de x vers y

Règle du « suffixe fixé »

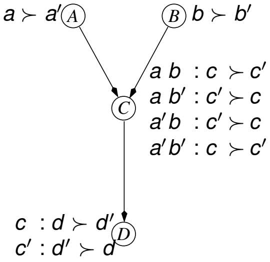
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, est-ce que $x \succ y$?
- $x_j = y_j$, $j = i, \ldots, n \Longrightarrow$ s'il existe une séquence améliorante de flips de y à x, il en existe une pour laquelle les valeurs des attributs X_j, $j = i, \ldots, n$, restent fixées à $x_j = y_j$.

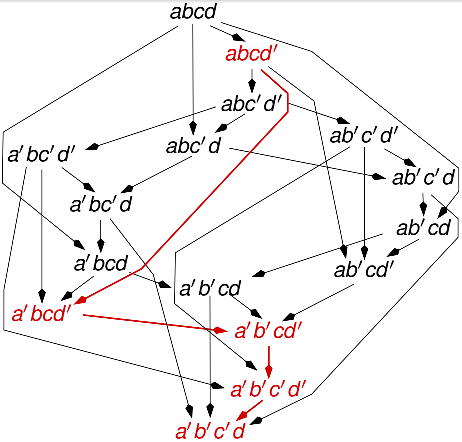




Règle de « l'extension du suffixe »

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, est-ce que $x \succ y$?
- $x_j = y_j$, $j = i, \ldots, n$ et $\exists$ un flip améliorant de y_{i-1} à $y'_{i-1} = x_{i-1}$
  $\Longrightarrow$ si $\exists$ une séquence améliorante de flips de y à x, il en existe une t.q. les valeurs des attributs X_j, $j = i-1, \ldots, n$, sont fixées à $x_j = y_j$.





Calcul de dominance avec les CP-nets (5/5)

Algorithme général de construction de séquences de flips

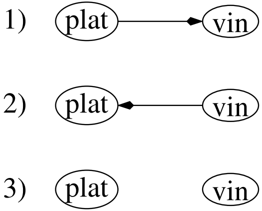
1. appliquer, si possible, la règle du « suffixe fixé »
2. appliquer, si possible, la règle de « l'extension du suffixe »
3. essayer (avec backtrack possible) de faire des flips (améliorants) avec les attributs les plus bas dans le CP-net
4. en conjonction avec 3, faire du pruning

- Repas = Plat de résistance + vin + dessert
  plat $\in$ {cassoulet, poisson}
  vin $\in$ {vin rouge, vin blanc}
  dessert $\in$ {rien, profiterole au chocolat}

- $u(\text{repas}) = u_1(\text{plat, vin}) + u_2(\text{plat, dessert})$

(cassoulet,rouge) $\succ_X$ (poisson,blanc) $\succ_X$ (cassoulet,blanc) $\succ_X$ (poisson,rouge)

	rouge	blanc
cassoulet	3	1
poisson	0	2



$\Longrightarrow$ non représentable par un CP-net (compact)

Biblio sur les modèles graphiques de « préférences »

Références

- C Boutilier, R Brafman, H Holger et D Poole (1999) "Reasoning with Conditional Ceteris Paribus Preference Statements", Proceedings d'UAI-99
- R Brafman, C Domshlak (2002) "Introducing variable importance tradeoffs into CP-nets", Proceedings d'UAI-02
- F Bacchus et A Grove (1995). "Graphical models for preference and utility", Proceedings d'UAI-95
- C Boutilier, F Bacchus et R Brafman (2001) "UCP-Networks : A directed graphical representation of conditional utilities", Proceedings d'UAI-01