cours 8
Construction de l'arbre de jonction

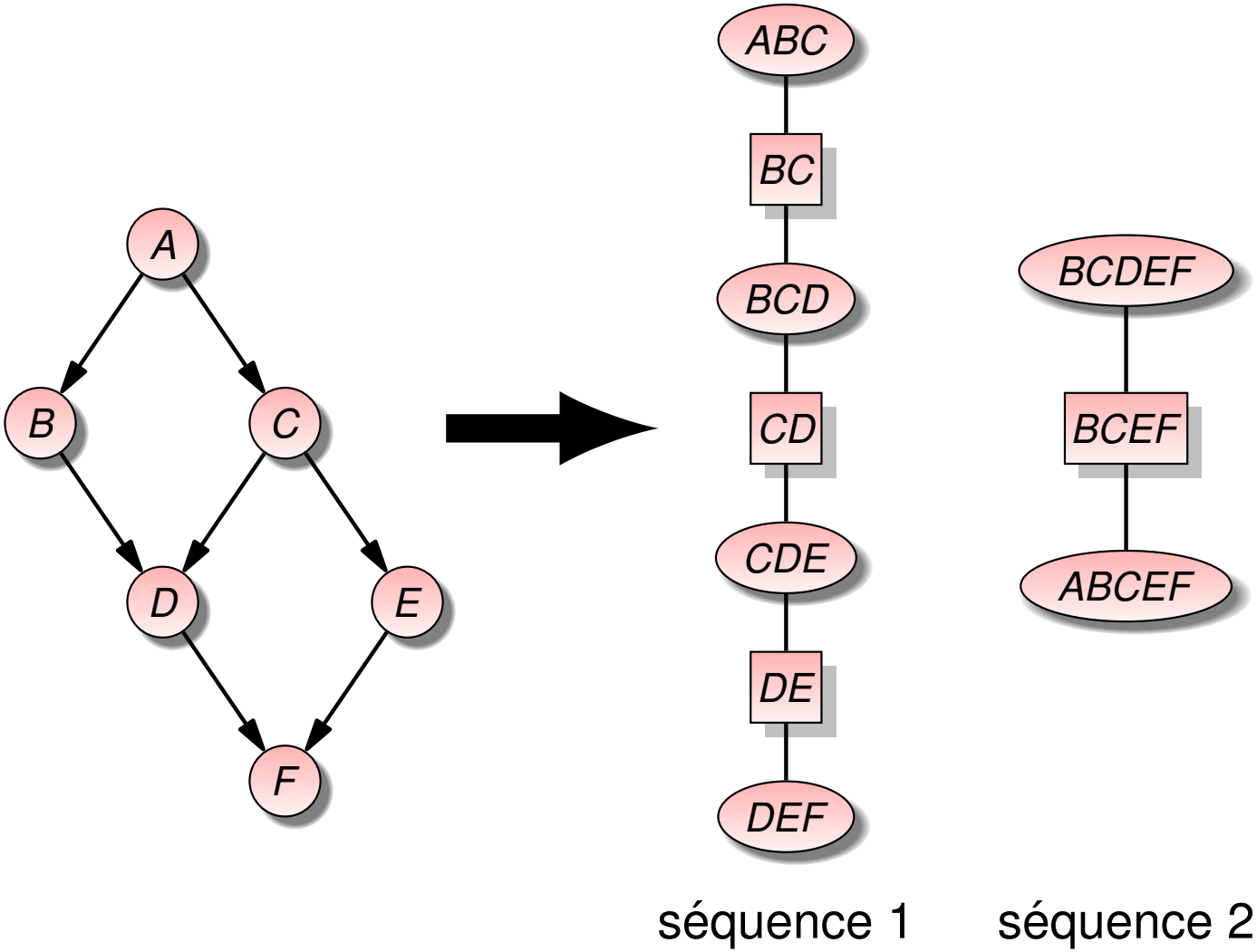
Aix*Marseille université
Initiative d'excellence

Master SID — Raisonnement dans l'incertain

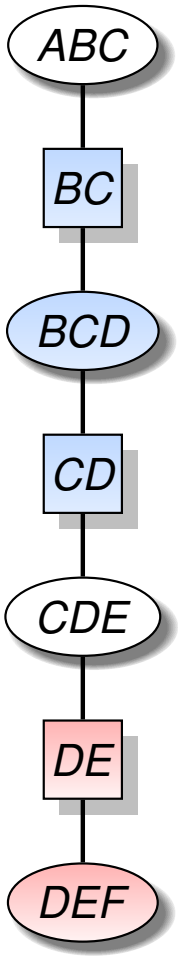
©CG(2026)

Toutes les séquences d'élimination ne sont pas égales

Séquence 1 : A, B, C, F, D, E **Séquence 2 :** D, C, A, E, B, F



De la propriété d'intersection courante



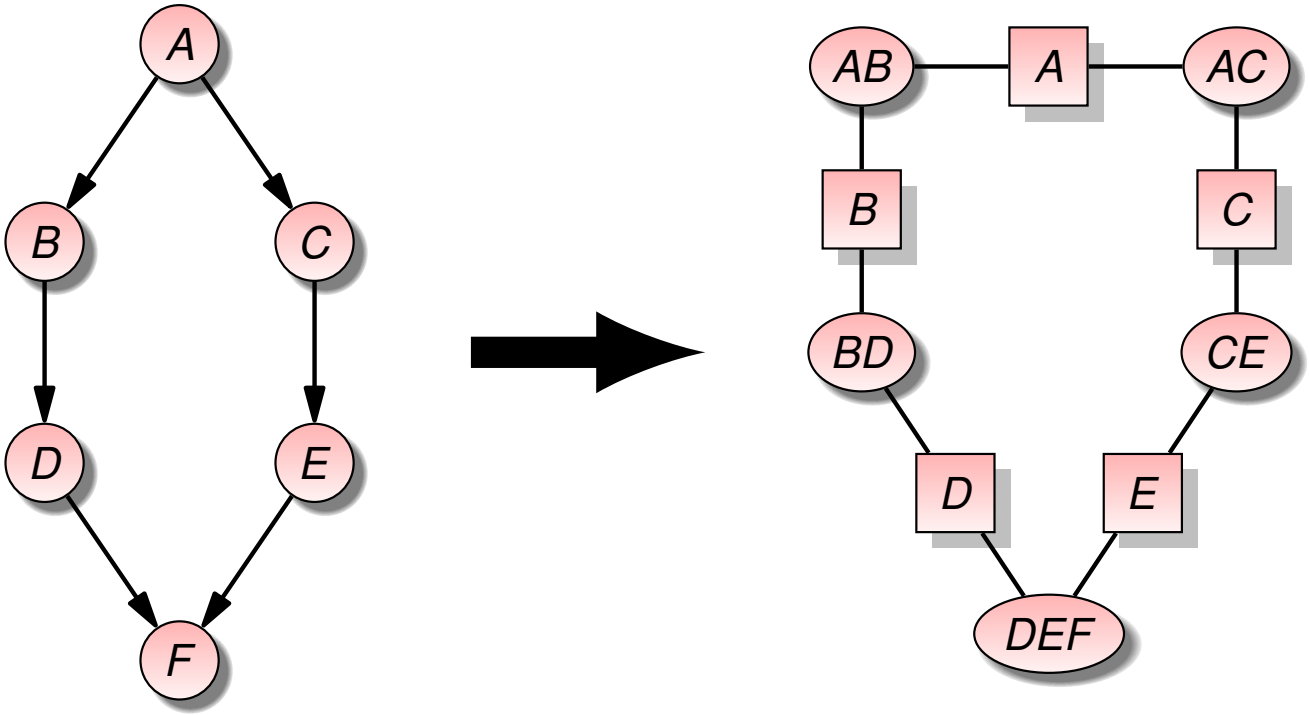
Propriété d'intersection courante

Soient C_1 et C_2 deux cliques quelconques de l'arbre de jonction et soit $S = C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Alors sur toute chaîne reliant C_1 et C_2, les cliques et séparateurs contiennent S

Théorème

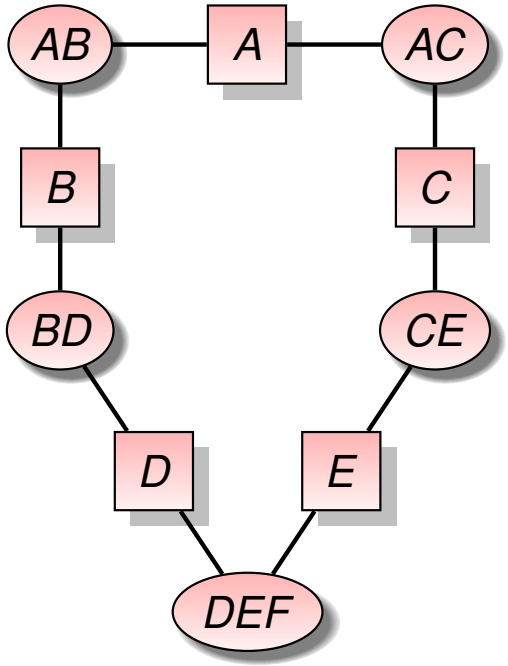
L'algorithme de Shafer-Shenoy fonctionne avec n'importe quel graphe sans cycle vérifiant la propriété d'intersection courante (ce que l'on appelle un *join tree*)

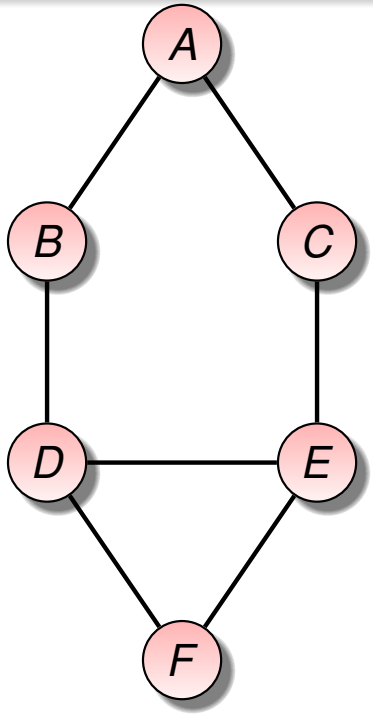
Un graphe de jonction avec cycles



Si l'on n'y prend garde, des cycles peuvent exister bien que la propriété d'intersection courante soit vérifiée

Graphe de jonction et triangulation (1/2)



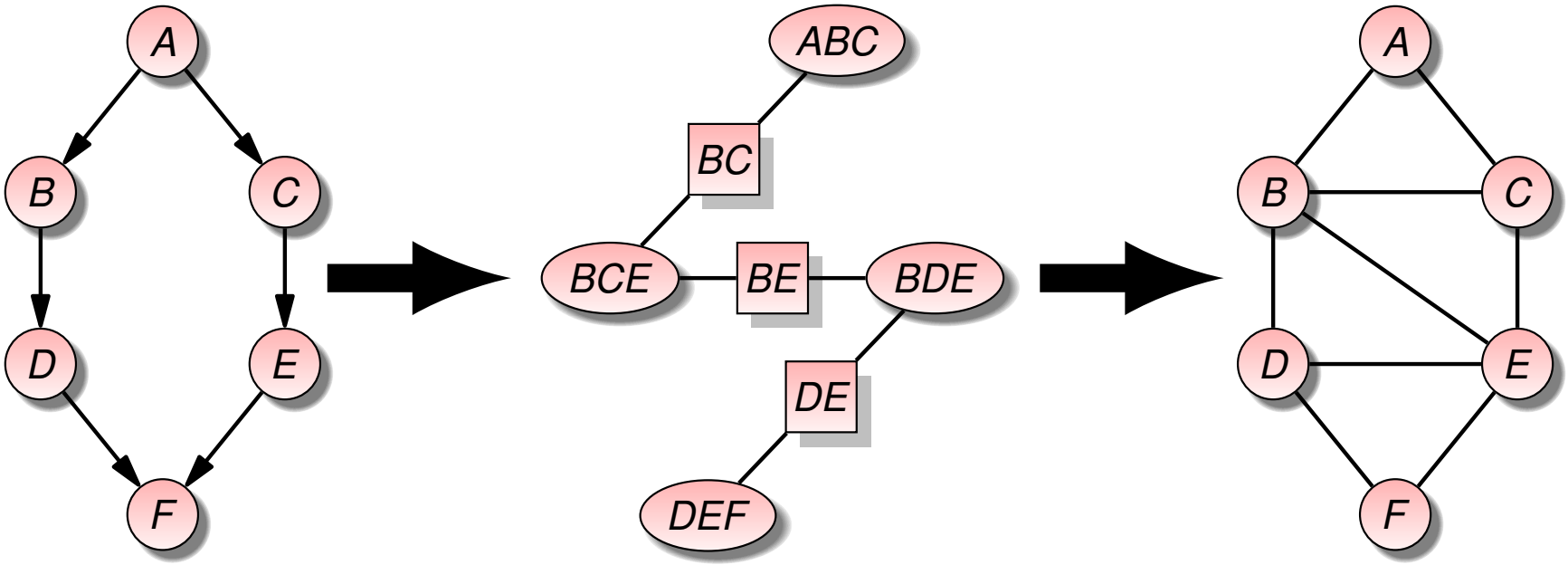


Triangulation

Un graphe non orienté est triangulé si et seulement si, pour tout cycle de longueur 4 ou plus, il existe une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux nœuds non consécutifs du cycle

Exemple : le graphe ci-dessus n'est pas triangulé car le cycle A, B, D, E, C, A ne comporte pas de corde

Graphe de jonction et triangulation (2/2)



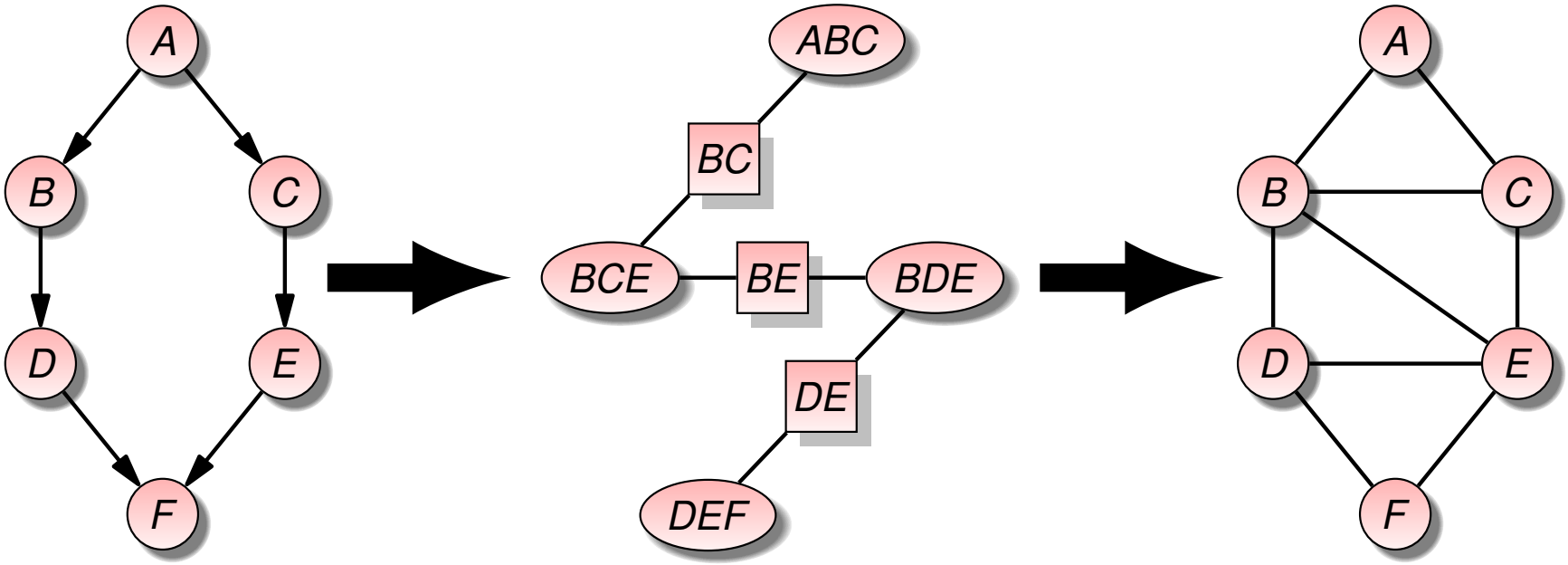
Proposition

il y a équivalence entre les deux assertions :

1. Le graphe de jonction est acyclique
2. Le graphe non orienté correspondant est triangulé

$\Longrightarrow$ pour trouver un « bon » arbre de jonction, il faut trouver une « bonne » triangulation

Un peu de morale, ça ne fait pas de mal



Moralisation

relier tous les parents d'un même nœud, puis supprimer les orientations $\Longrightarrow$ le graphe moral.

$\Longrightarrow$ les cliques pourront contenir l'ensemble des probabilités conditionnelles de la décomposition de la loi jointe

Recherche des triangulations optimales (1/2)

Proposition *[Rose 1970]*

Un graphe non orienté est triangulé si et seulement si l'application des deux règles suivantes permet d'éliminer tous les nœuds X_i du graphe sans rajouter une seule arête :

1. on rajoute des arêtes entre tous les voisins du nœud X_i que l'on veut éliminer (on forme une clique)
2. on supprime X_i ainsi que les arêtes qui lui sont adjacentes du graphe

$\Longrightarrow$ pour créer un join tree, il suffit de partir d'un graphe non orienté et d'appliquer, avec une certaine séquence d'élimination, les deux points ci-dessus

[Mellouli (87)] : Tout join tree « optimal » peut être construit à partir d'une séquence d'élimination

Recherche des triangulations optimales (2/2)

- *Arnborg et al. (87) :* trouver la triangulation optimale est NP-difficile $\Longrightarrow$ essayer de trouver des heuristiques

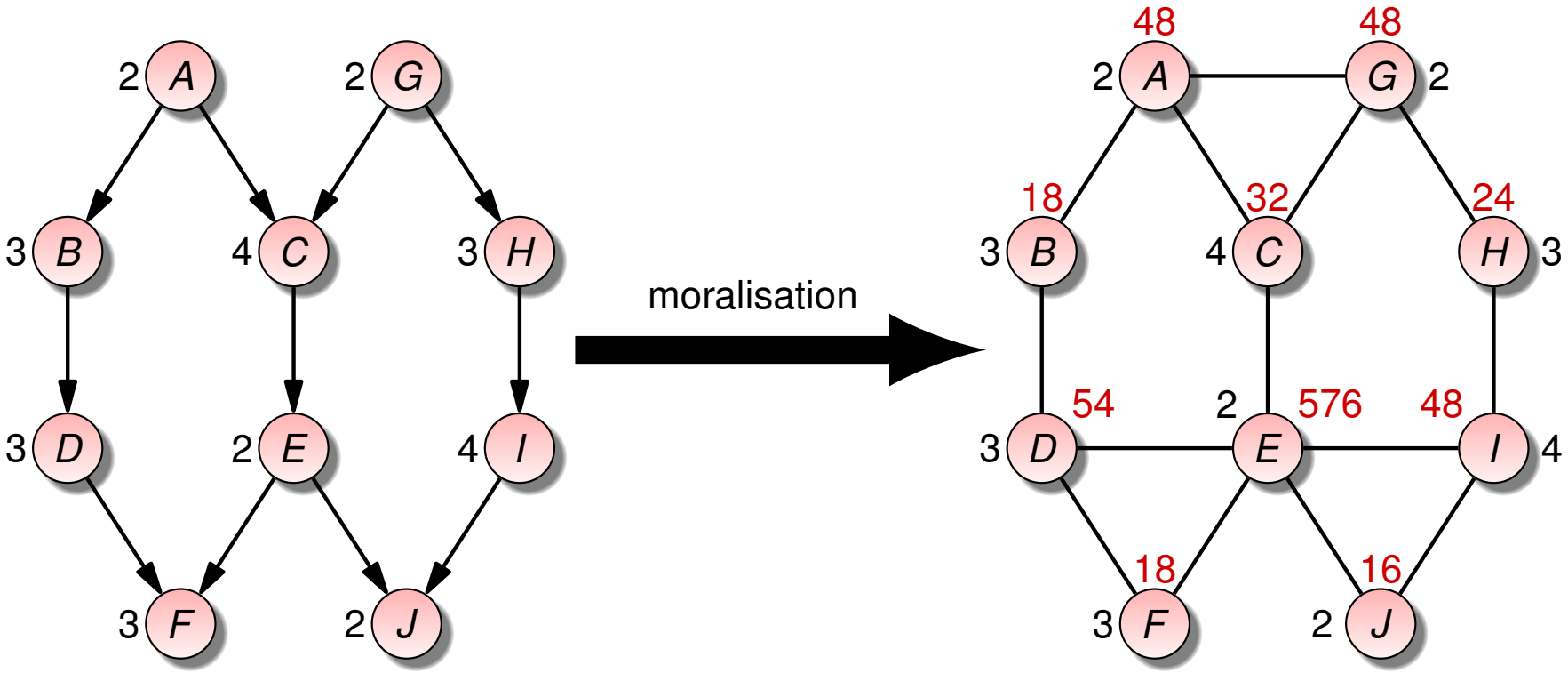
- *Kjærulff (90) :* un algorithme glouton rapide et efficace :
  Soit un graphe non orienté (moral) $G = (X, E)$, $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$
  1. Associer à chaque X_i un « poids » égal au produit des modalités de X_i et de ses voisins
  2. éliminer le nœud X_i dont le poids est minimal (i.e., relier tous ses voisins de manière à former une clique C_i puis éliminer X_i et ses arêtes adjacentes)
  3. mettre à jour les poids des nœuds restants

  $\Longrightarrow$ les C_i sont les cliques (ellipses) du join tree

- *van den Eijkhof & Bodlaender (2002) :* "safe reductions"
  $\Longrightarrow$ élimination de variables avec garantie d'optimalité

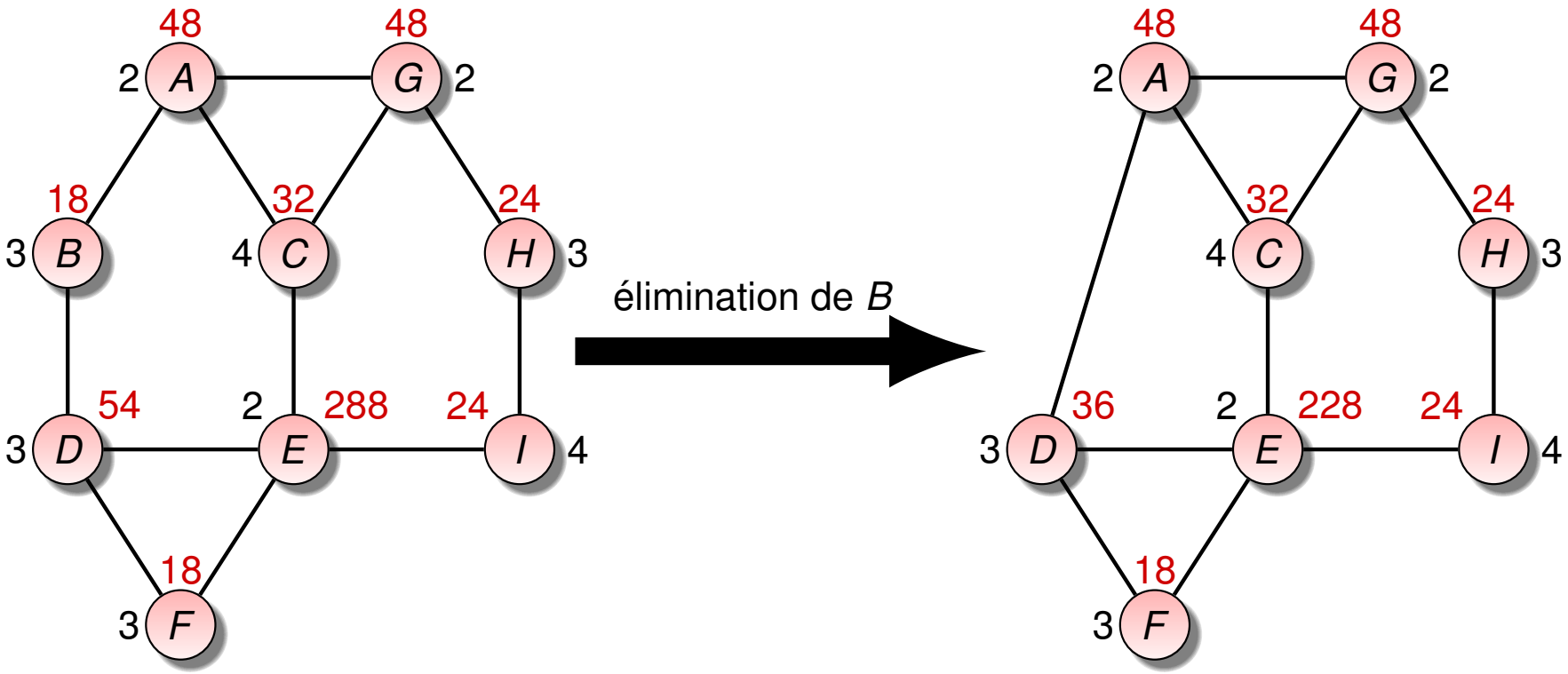
- Autres algorithmes : Becker & Geiger (96) ; Shoiket & Geiger (87)

Exemple de création de join tree (1/5)



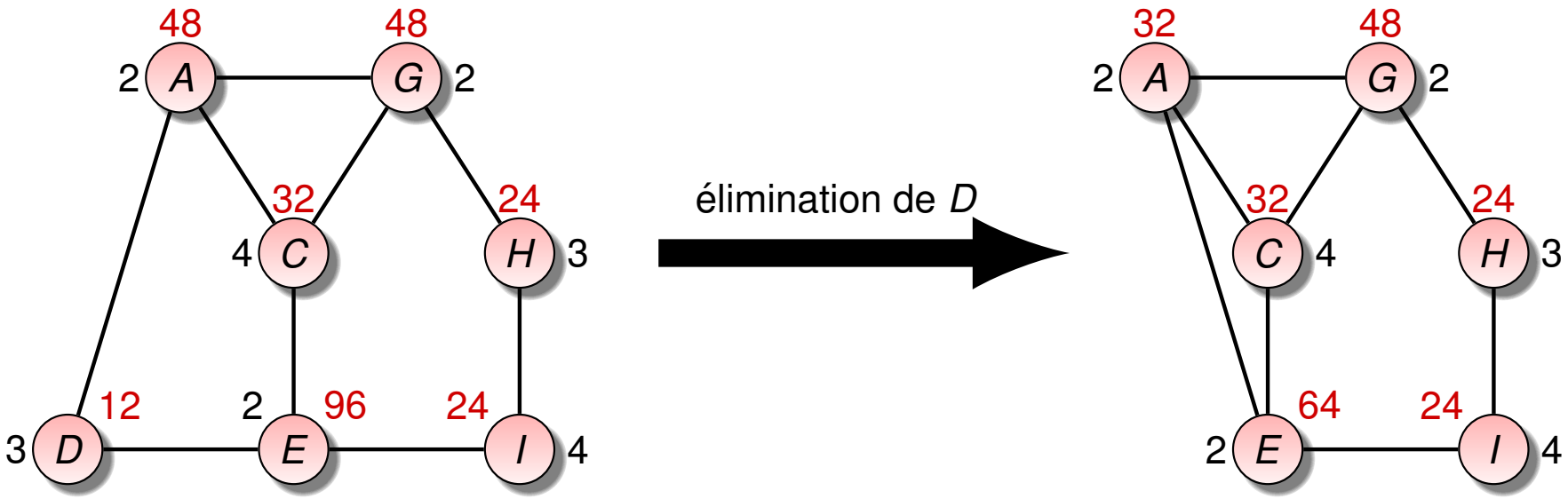
- Variable à éliminer : $J \Longrightarrow$ clique EIJ

Exemple de création de join tree (2/5)



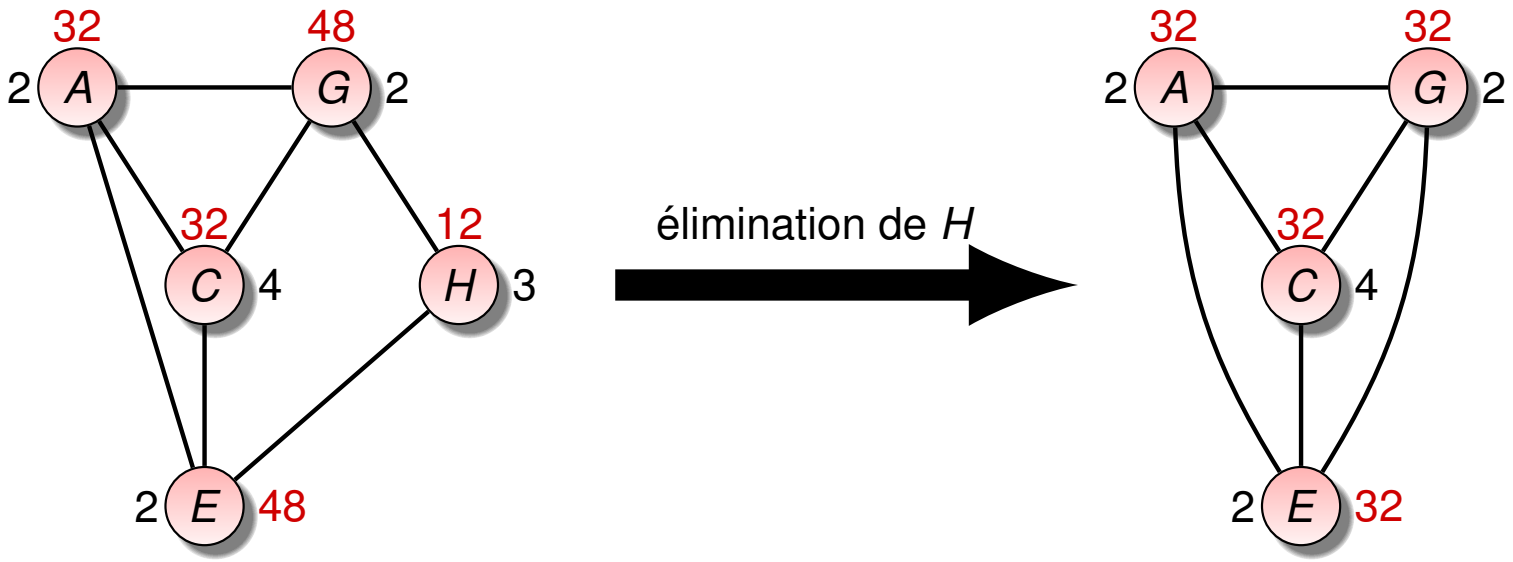
- première variable à éliminer : $B \Longrightarrow$ clique ABD
- deuxième variable à éliminer : $F \Longrightarrow$ clique DEF

Exemple de création de join tree (3/5)



- première variable à éliminer : $D \Longrightarrow$ clique ADE
- deuxième variable à éliminer : $I \Longrightarrow$ clique EHI

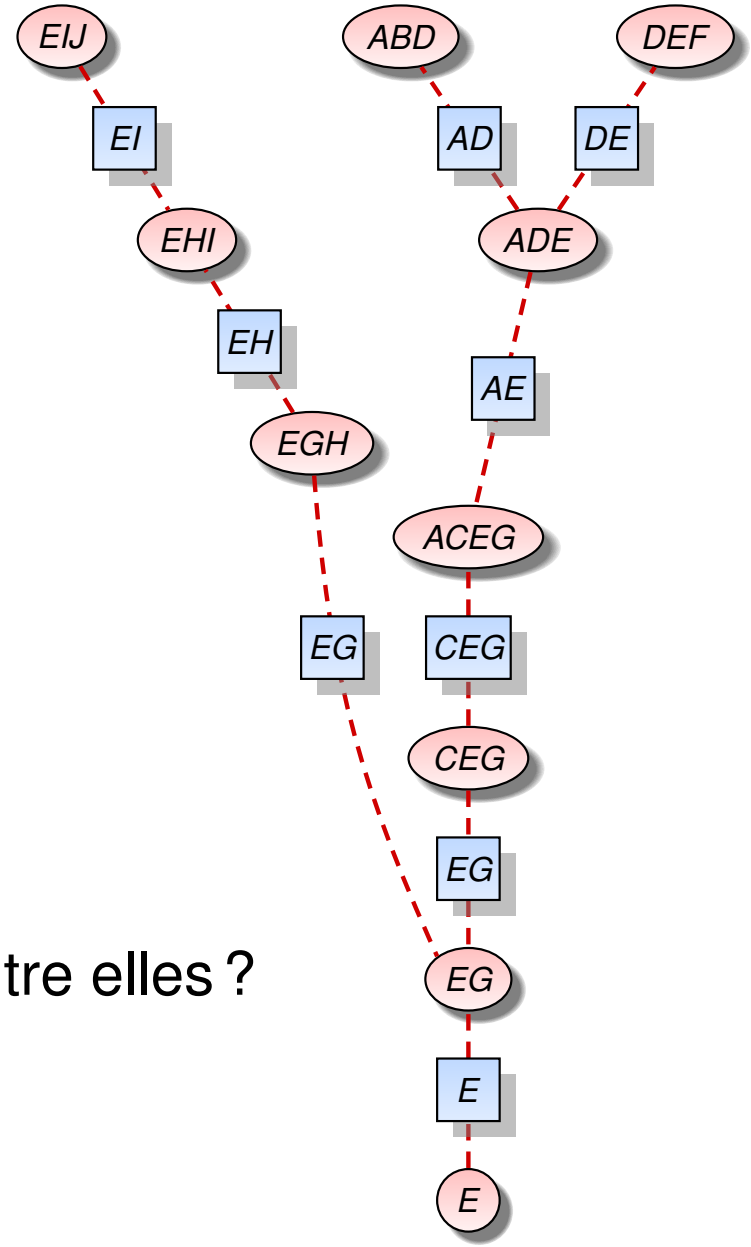
Exemple de création de join tree (4/5)



- première variable à éliminer : $H \Longrightarrow$ clique EGH
- puis les autres variables peuvent être éliminées dans n'importe quel ordre puisqu'elles appartiennent toutes à la même clique : $A \Longrightarrow$ clique $ACEG$
  $C \Longrightarrow$ clique CEG
  $G \Longrightarrow$ clique EG
  $E \Longrightarrow$ clique E

Exemple de création de join tree (5/5)

Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)



Problème : comment relier les cliques entre elles ?

Des cliques vers l'arbre d'élimination (1/2)

Définition de l'arbre d'élimination

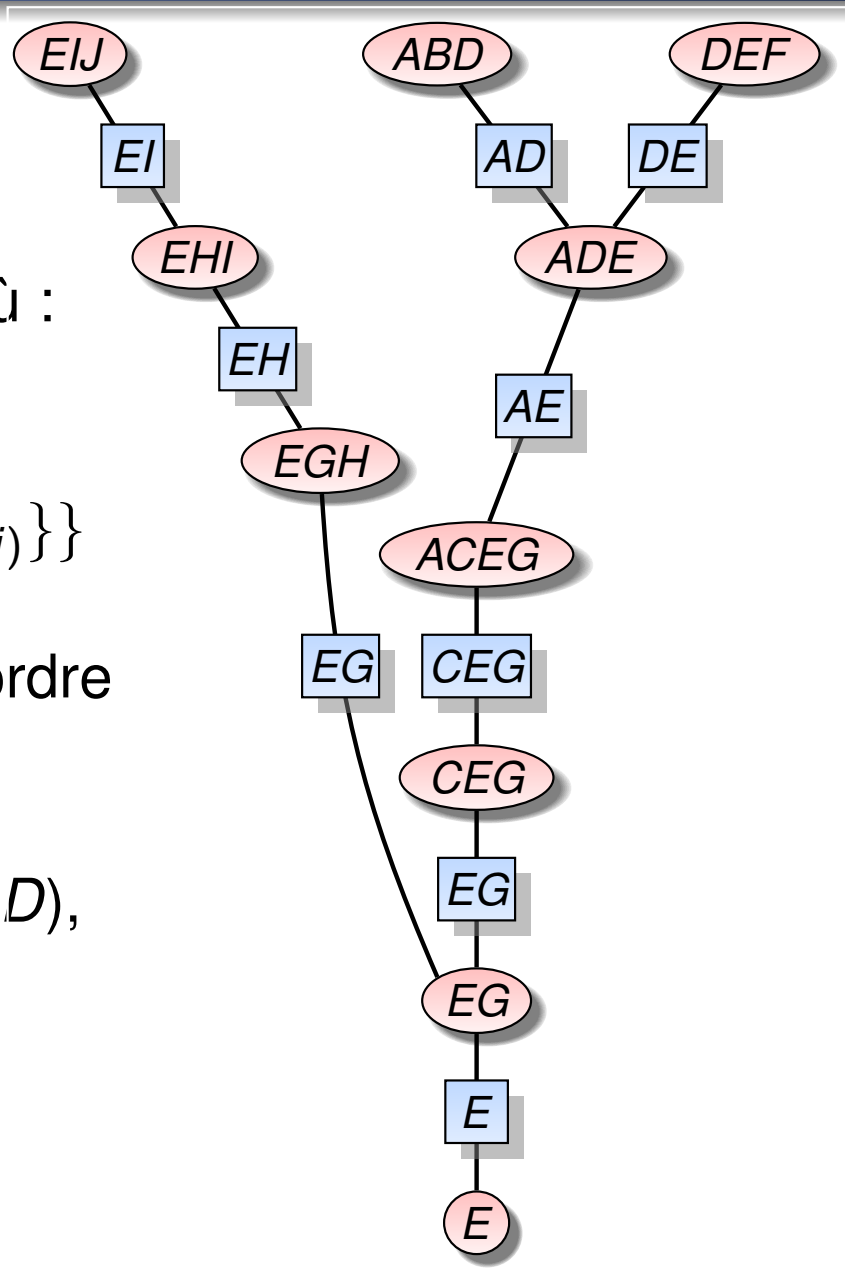
- Soit $\sigma : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ la permutation telle que les variables X_i sont éliminées dans l'ordre $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$
- Pour tout i, soit $D_{\sigma(i)}$ la clique créée au moment où $X_{\sigma(i)}$ est éliminée
- Arbre d'élimination : graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) :$
    $1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

$\Longrightarrow$ Si l'on trie les nœuds X_i à l'intérieur des cliques selon leur ordre d'élimination, alors :
on relie $D_{\sigma(i)} = \{X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)}, \ldots\}$ à $D_{\sigma(j)}$.

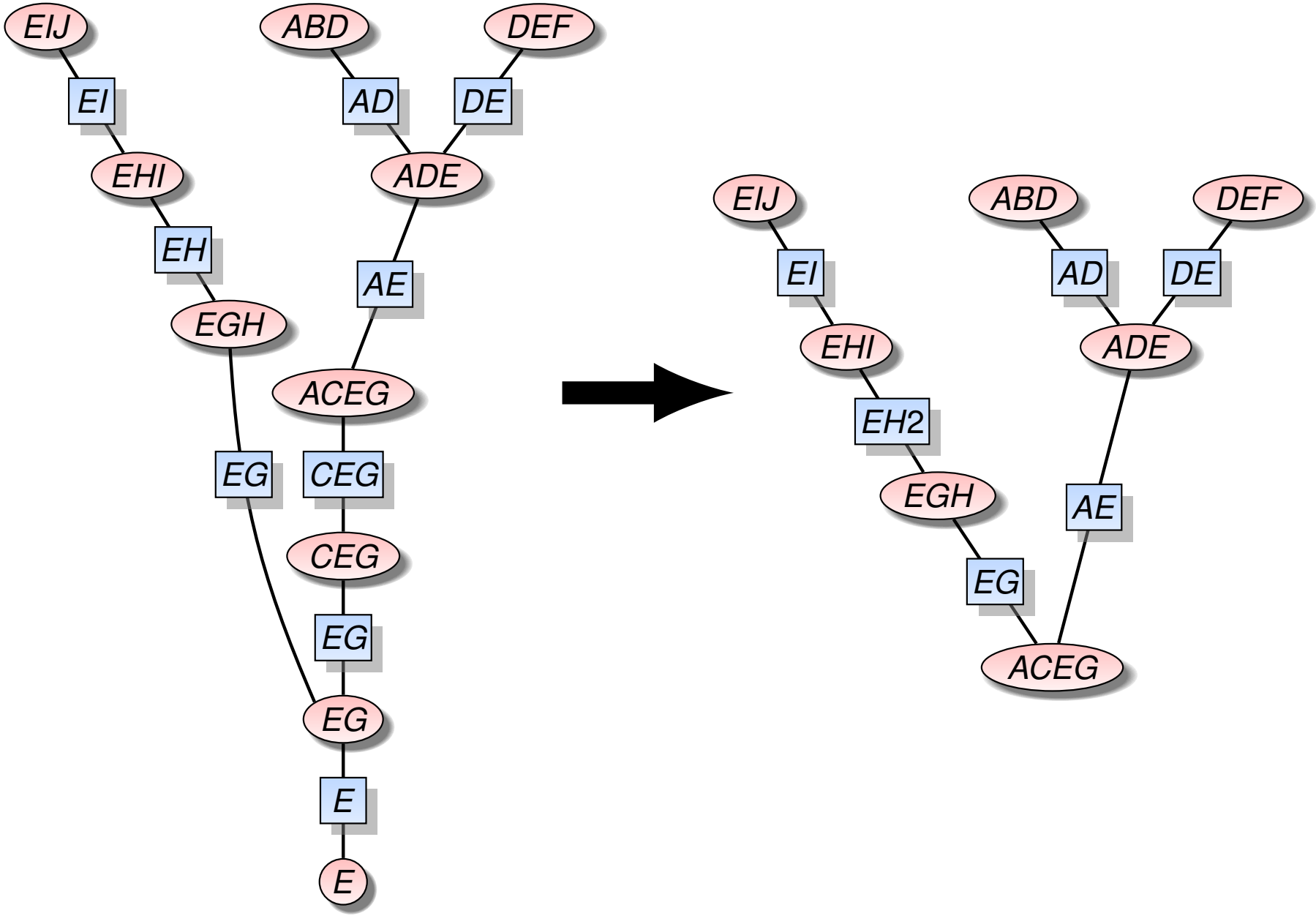
Des cliques vers l'arbre d'élimination (2/2)

- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)



De l'arbre d'élimination vers l'arbre de jonction (1/2)



Propriétés de l'arbre d'élimination

Propriétés

$\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
$\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

1. L'arbre d'élimination est un arbre
2. Il vérifie la propriété d'intersection courante
3. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $|D_{\sigma(j)}| \geq |D_{\sigma(i)}| - 1$
4. Soient $D_{\sigma(i)}$ et $D_{\sigma(j)}$ les parents de $D_{\sigma(k)}$, alors $D_{\sigma(i)} \not\subset D_{\sigma(j)}$ et $D_{\sigma(j)} \not\subset D_{\sigma(i)}$
5. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $D_{\sigma(j)} \subset D_{\sigma(i)} \iff |D_{\sigma(j)}| = |D_{\sigma(i)}| - 1$
6. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$ tel que $D_{\sigma(j)} \not\subset D_{\sigma(i)}$, alors il n'existe pas d'ancêtre $D_{\sigma(k)}$ de $D_{\sigma(i)}$ tel que $D_{\sigma(j)} \subset D_{\sigma(k)}$

De l'arbre d'élimination vers l'arbre de jonction (2/2)

Algorithme pour obtenir un arbre de jonction

01 créer l'arbre d'élimination $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$
02 marquer à **false** tous les arcs de $\mathcal{E}$
03 **pour** i variant de n à 1 **faire**
04 **si** il existe $D_{\sigma(j)}$ parent de $D_{\sigma(i)}$ tel que l'arc $(D_{\sigma(j)}, D_{\sigma(i)})$ est non marqué et $|D_{\sigma(i)}| = |D_{\sigma(j)}| - 1$ **alors**
05 **pour** tous les autres parents $D_{\sigma(k)}$ de $D_{\sigma(i)}$ **faire**
06 créer dans $\mathcal{G}$ un arc $(D_{\sigma(k)}, D_{\sigma(j)})$
07 marquer cet arc à `true`
08 **fait**
09 **si** $D_{\sigma(i)}$ a un enfant $D_{\sigma(k)}$ **alors**
10 créer dans $\mathcal{G}$ un arc $(D_{\sigma(j)}, D_{\sigma(k)})$
11 **finsi**
12 supprimer $D_{\sigma(i)}$ ainsi que ses arcs adjacents
13 **fait**

A la fin de l'algorithme ci-dessus, $\mathcal{G}$ est un arbre de jonction.

Bibliographie

- Becker A. et Geiger D. (1996) « A sufficiently fast algorithm for finding close to optimal junction trees », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Flores J., Gámez J. et Olesen, K. (2003) « Incremental compilation of Bayesian networks », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Jensen F.V. et Jensen F. (1994) « Optimal junction trees », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Kjærulff U. (1990) « Triangulation of graphs – Algorithms giving small total state space », technical report, Aalborg University
- Kjærulff U. (1991) « Optimal decomposition of probabilistic networks by simulated annealing », Statistics and Computing, 2 :7–17
- Leimer H.-G. (1993) « Optimal decomposition by clique separators », Discrete Mathematics, 113 :99–123

Bibliographie

- Lepar V. et Shenoy P.P. (1998) « A Comparison of Lauritzen-Spiegelhalter, Hugin and Shenoy-Shafer Architectures for Computing Marginals of Probability Distributions », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence, 328–337
- Olesen K. et Madsen A. (1999) « Maximal prime decomposition of Bayesian networks », technical report.
- Shoikhet K. et Geiger D. (1997) « Finding optimal triangulations via minimal vertex separators », Proccedings of the International Conference on Artificial Intelligence
- van den Eijkhof F. et Bodlaender A. (2002) « Safe reduction rules for weighted treewidth », Proceedings of the 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, 2573 :176–185