cours 7
Inférences et observations

Aix*Marseille université
Initiative d'excellence

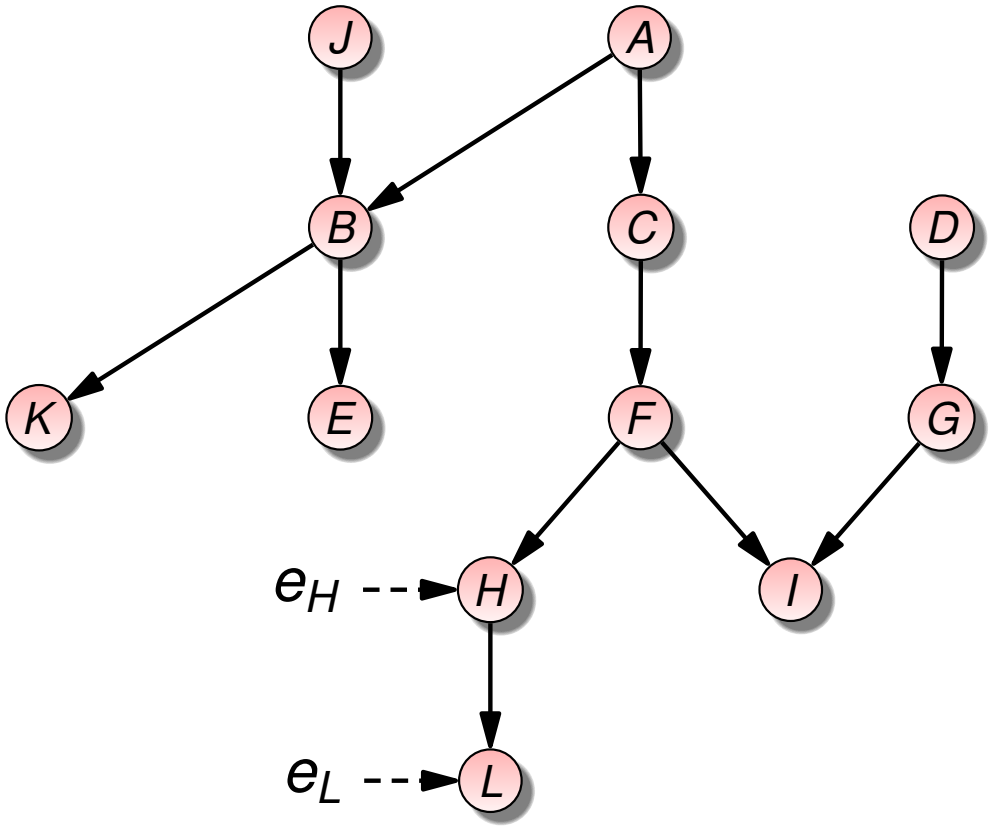
Master SID — Raisonnement dans l'incertain

©CG(2026)

Soyons observateur : les probabilités a posteriori

Nous observons des informations e_H sur H et e_L sur L.

On veut connaître $P(I|e_H, e_L)$

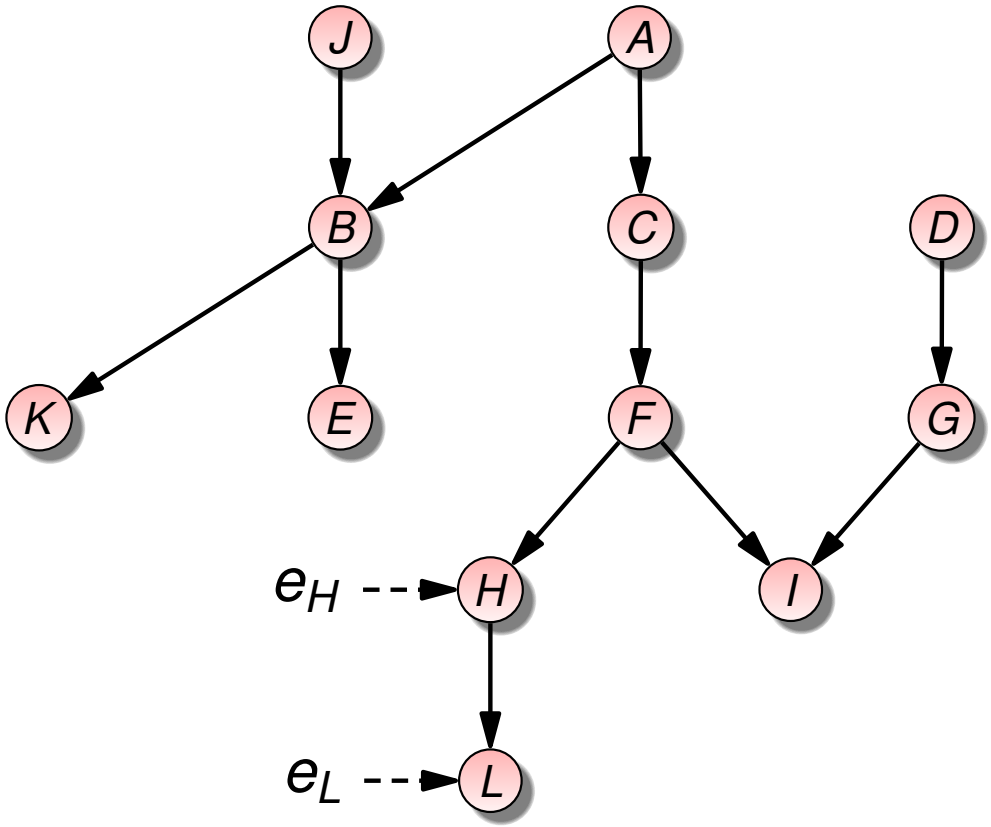


Soyons observateur : les probabilités a posteriori

Nous observons des informations e_H sur H et e_L sur L.

On veut connaître $P(I|e_H, e_L)$

$\Longrightarrow$ on va calculer $P(I, e_H, e_L)$ car c'est plus simple



Quelles sont ces informations ?

Teneur des informations

informations = observations :

e_L = « L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 »

Quelles sont ces informations ?

Teneur des informations

informations = observations :

e_L = « L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 »

Entrée de ces observations : $P(e_L|L)$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : e_L = ≪ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 ≫

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline ? & l_1 \\ \hline & l_2 \\ \hline & l_3 \\ \hline & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : e_L = ≪ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 ≫

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0 & l_1 \\ \hline ? & l_2 \\ \hline & l_3 \\ \hline & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : e_L = ≪ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 ≫

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0 & l_1 \\ \hline 1 & l_2 \\ \hline ? & l_3 \\ \hline & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : e_L = ≪ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 ≫

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0 & l_1 \\ \hline 1 & l_2 \\ \hline 1 & l_3 \\ \hline ? & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : e_L = ≪ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 ≫

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0 & l_1 \\ \hline 1 & l_2 \\ \hline 1 & l_3 \\ \hline 0 & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : e_L = « Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et l_4 »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0 & l_1 \\ \hline 1 & l_2 \\ \hline 1 & l_3 \\ \hline 0 & l_4 \\ \hline \end{array}$$

dimension de $P(e_L|L) = |L|$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : e_L = « Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2. Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline ? & l_1 \\ \hline & l_2 \\ \hline & l_3 \\ \hline & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : e_L = « Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2. Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0.1 & l_1 \\ \hline ? & l_2 \\ \hline & l_3 \\ \hline & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : e_L = « Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2. Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0.1 & l_1 \\ \hline 0.9 & l_2 \\ \hline ? & l_3 \\ \hline & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : e_L = « Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2. Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0.1 & l_1 \\ \hline 0.9 & l_2 \\ \hline 0.1 & l_3 \\ \hline ? & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : e_L = « Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2. Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0.1 & l_1 \\ \hline 0.9 & l_2 \\ \hline 0.1 & l_3 \\ \hline 0 & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Hypothèses et conséquences (1/3)

Hypothèse

Toute information e_X sur un nœud X est indépendante du reste du réseau bayésien conditionnellement à X.

Hypothèses et conséquences (1/3)

Hypothèse

Toute information e_X sur un nœud X est indépendante du reste du réseau bayésien conditionnellement à X.

Conséquence

$$P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_H, e_L) = P(e_H|A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_L) \times P(e_L|A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \times P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L)$$

Hypothèses et conséquences (1/3)

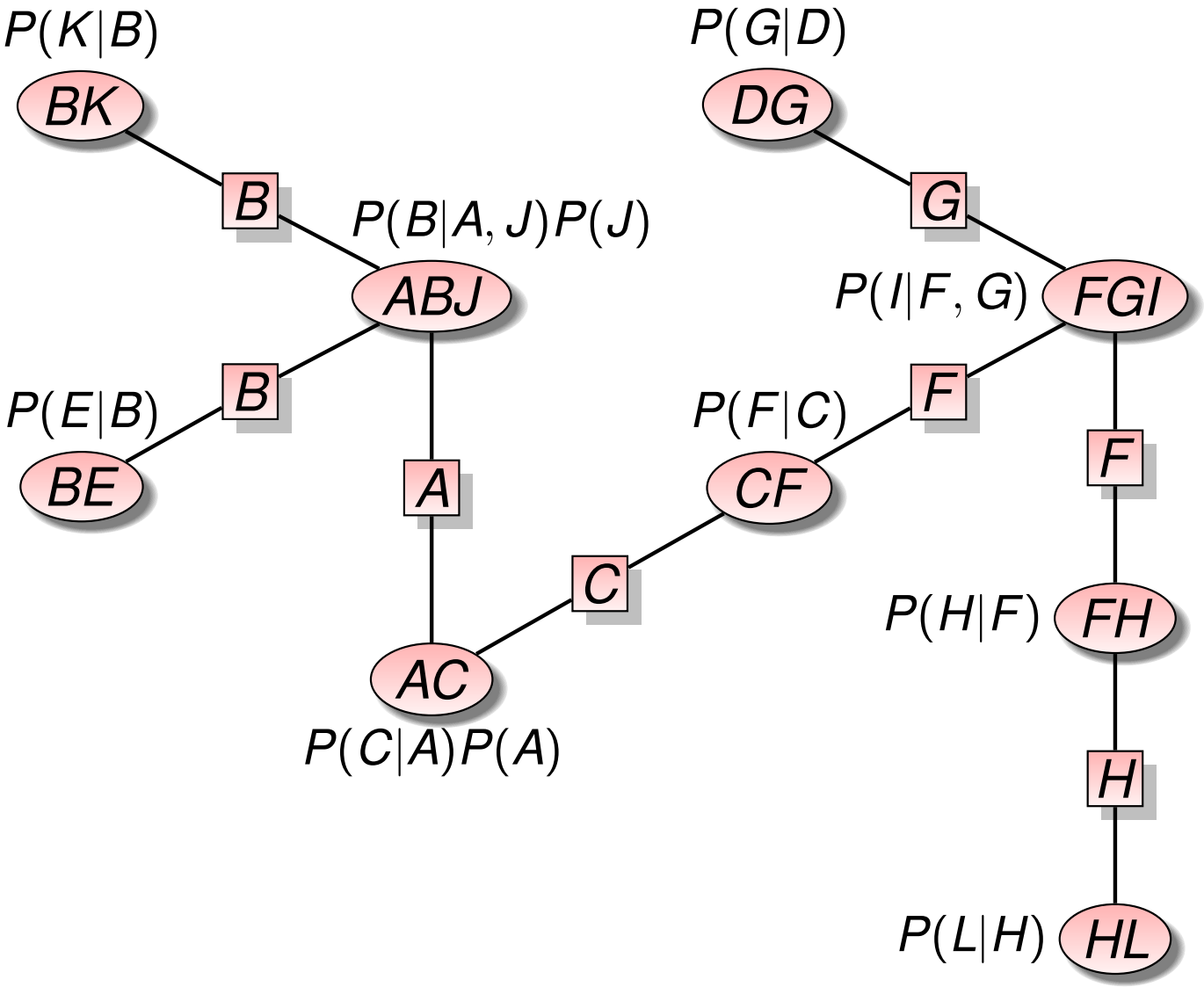
Hypothèse

Toute information e_X sur un nœud X est indépendante du reste du réseau bayésien conditionnellement à X.

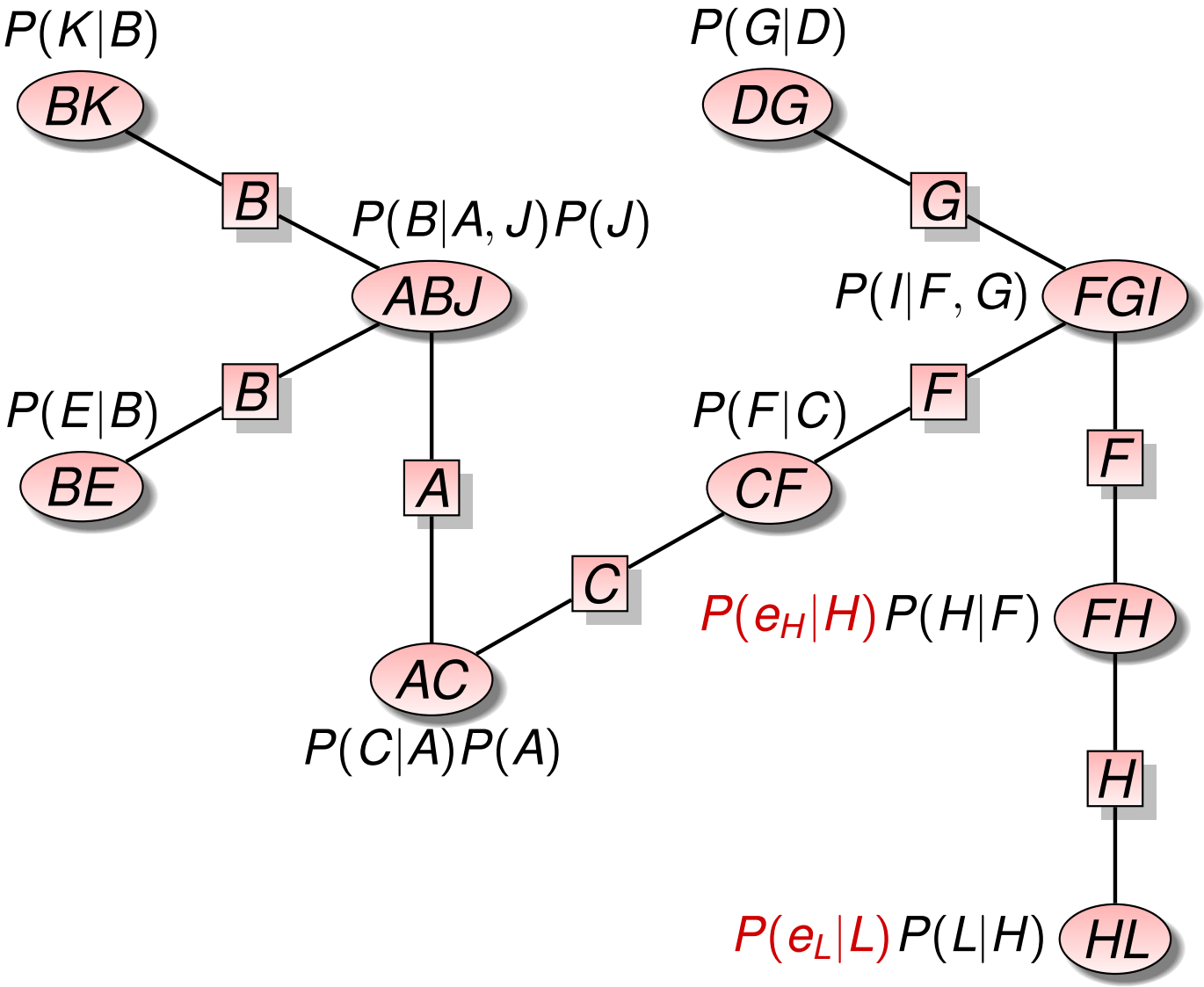
Conséquence

$$
\begin{aligned}
&P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_H, e_L) = \\
&\qquad P(e_H|A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_L) \times \\
&\qquad P(e_L|A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \times \\
&\qquad P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \\
&= P(e_H|H)P(e_L|L)P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L)
\end{aligned}
$$

Hypothèses et conséquences (2/3)



Hypothèses et conséquences (2/3)



Hypothèses et conséquences (3/3)

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$\Longrightarrow P(I, e_H, e_L) =$

Hypothèses et conséquences (3/3)

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\Longrightarrow P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

Hypothèses et conséquences (3/3)

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\Longrightarrow P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\Longrightarrow P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

Hypothèses et conséquences (3/3)

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\Longrightarrow P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\Longrightarrow P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

Or $P(e_H, e_L) =$

Hypothèses et conséquences (3/3)

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\Longrightarrow P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\Longrightarrow P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

Or $P(e_H, e_L) = \sum_{I} P(I, e_H, e_L)$

Hypothèses et conséquences (3/3)

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\Longrightarrow P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\Longrightarrow P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

Or $P(e_H, e_L) = \sum_I P(I, e_H, e_L)$

Donc $P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{\sum_I P(I, e_H, e_L)}$.

Résumé sur l'algorithme de Shafer-Shenoy

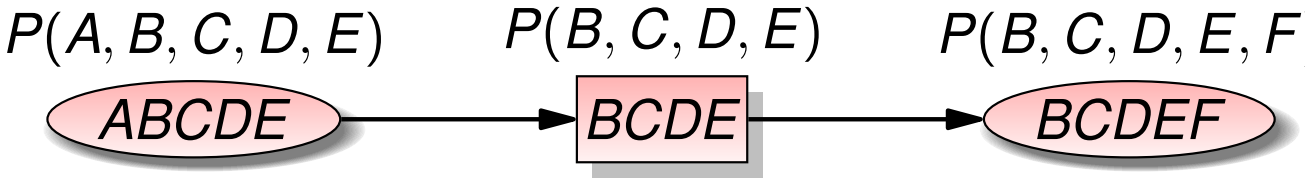
Algorithme de Shafer-Shenoy

Pour calculer une proba *a posteriori* $P(Y|e)$:

1. construire l'arbre de jonction
2. insérer les probas conditionnelles du réseau bayésien dans les cliques
3. insérer des tables contenant uniquement des 1 dans les séparateurs
4. pour chaque information e_X, calculer $P(e_X|X)$ et insérer cette proba dans une clique contenant X
5. envoyer les messages dans l'arbre de jonction
6. choisir une clique contenant Y, faire le produit de sa table de proba par tous les messages qui lui ont été envoyés, puis sommer sur toutes les variables $\neq Y \Longrightarrow P(Y, e)$
7. normaliser $P(Y, e) \Longrightarrow P(Y|e)$

2. Existe-t-il d'autres algorithmes d'inférence ?

De Shafer-Shenoy à Lazy propagation

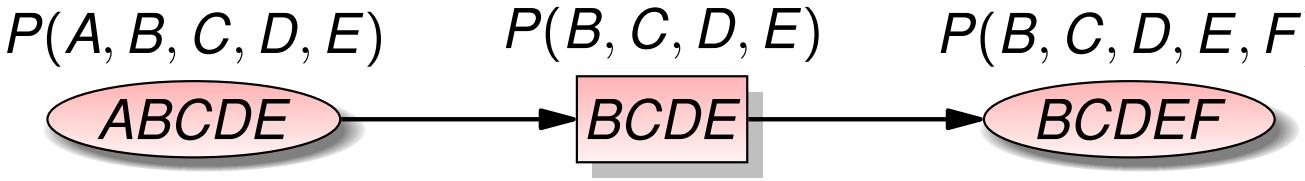


si $P(A, B, C, D, E) = P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

alors $P(B, C, D, E) = \sum_A P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

$$= \left(\sum_A P(A)P(C|A, B) \right) P(B)P(D)P(E|C, D)$$

De Shafer-Shenoy à Lazy propagation



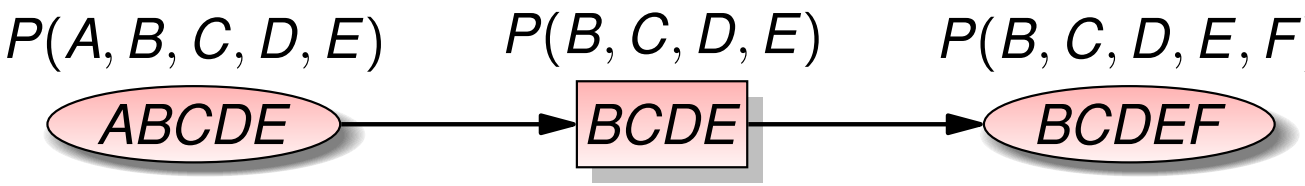
si $P(A, B, C, D, E) = P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

alors $P(B, C, D, E) = \sum_A P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

$$= \left(\sum_A P(A)P(C|A, B) \right) P(B)P(D)P(E|C, D)$$

$\Longrightarrow$ on a intérêt à ne pas effectuer les produits avant les sommes

De Shafer-Shenoy à Lazy propagation



si $P(A, B, C, D, E) = P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

alors $P(B, C, D, E) = \sum_A P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

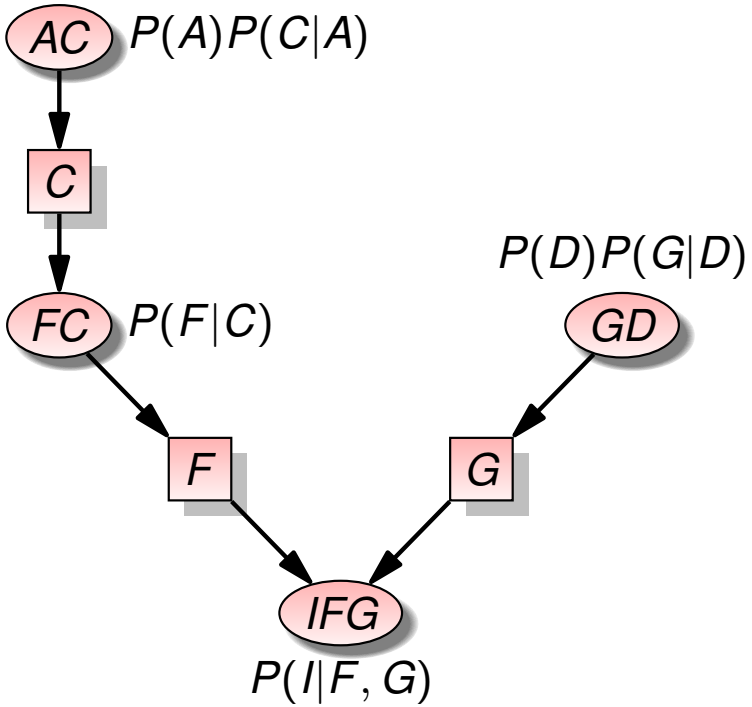
$$= \left(\sum_A P(A)P(C|A, B) \right) P(B)P(D)P(E|C, D)$$

$\Longrightarrow$ on a intérêt à ne pas effectuer les produits avant les sommes

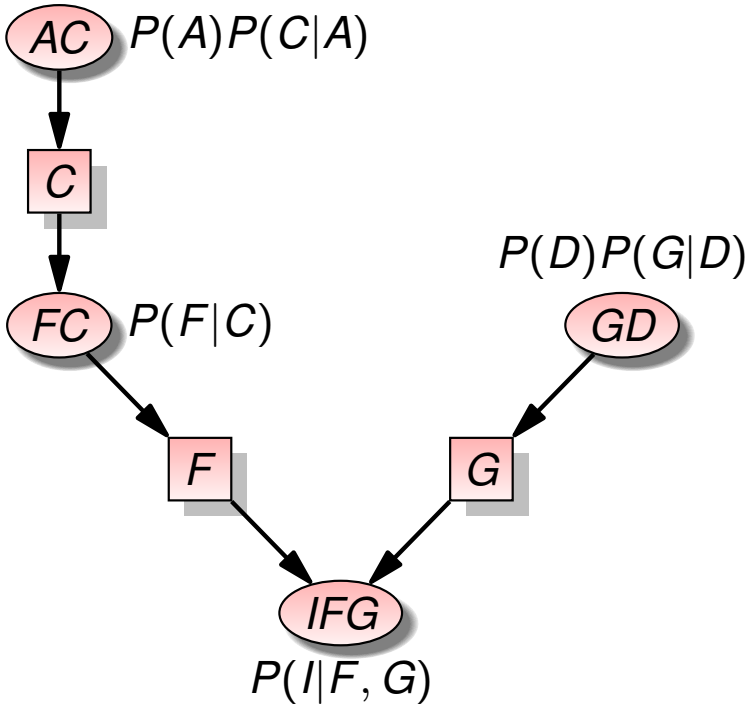
Lazy propagation

Principe : garder les produits sous forme de listes et n'effectuer les multiplications que lorsque c'est nécessaire.

De Shafer-Shenoy à Jensen

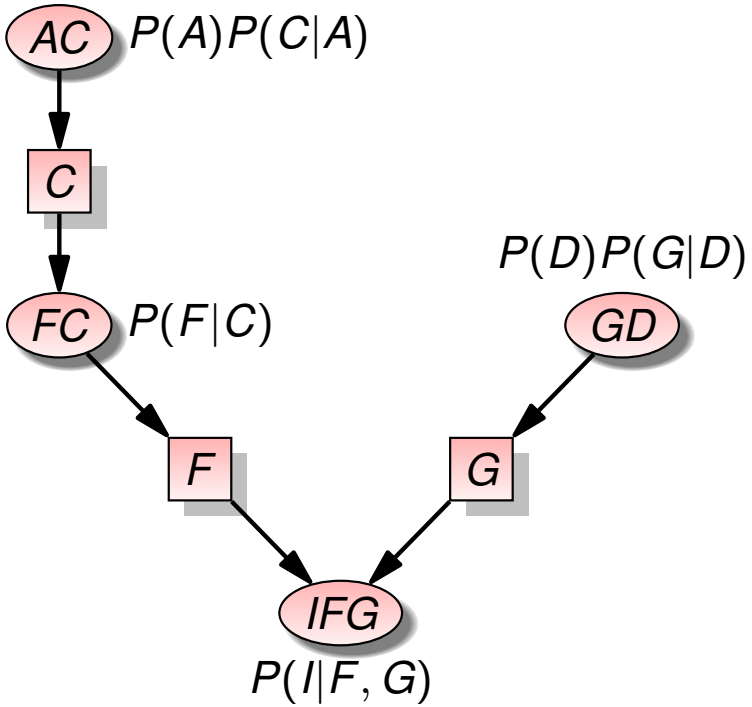


De Shafer-Shenoy à Jensen



Shafer-Shenoy : élimination de $A \Longrightarrow P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

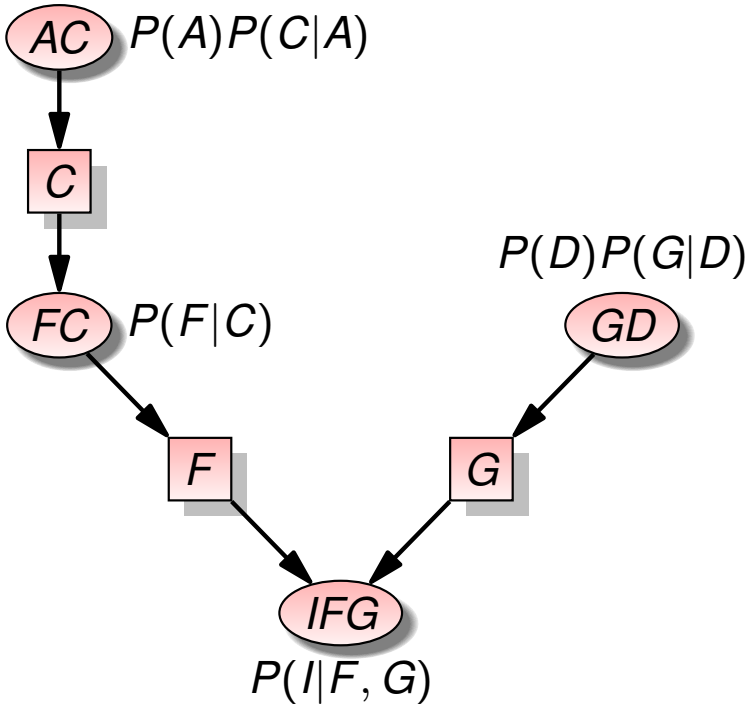
De Shafer-Shenoy à Jensen

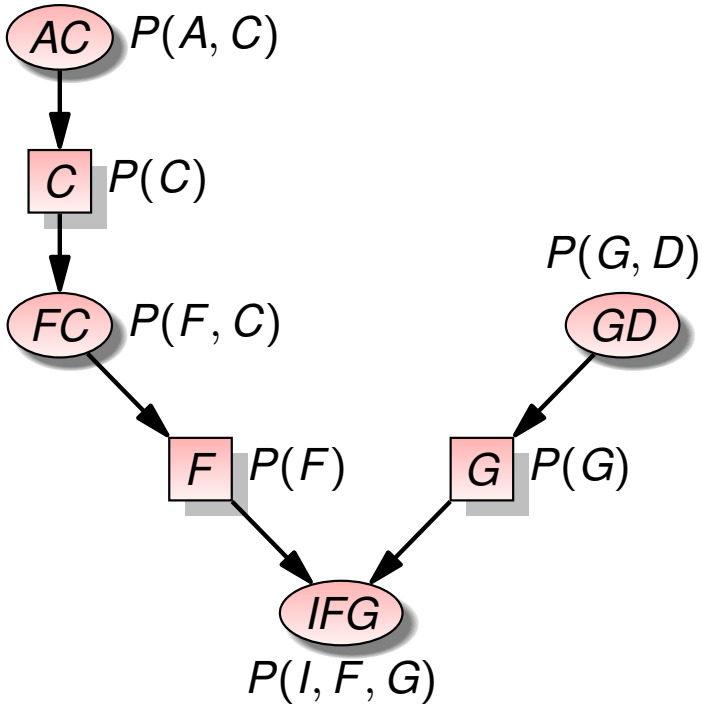


Shafer-Shenoy : élimination de $A \Longrightarrow P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

élimination de $C \Longrightarrow P(F, C, e_A) = P(F|C)P(C, e_A)$

De Shafer-Shenoy à Jensen

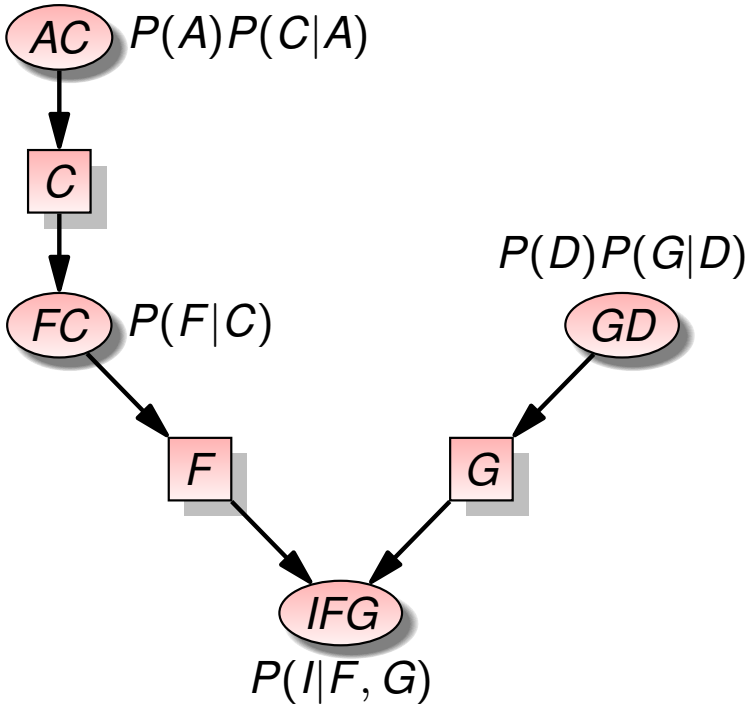


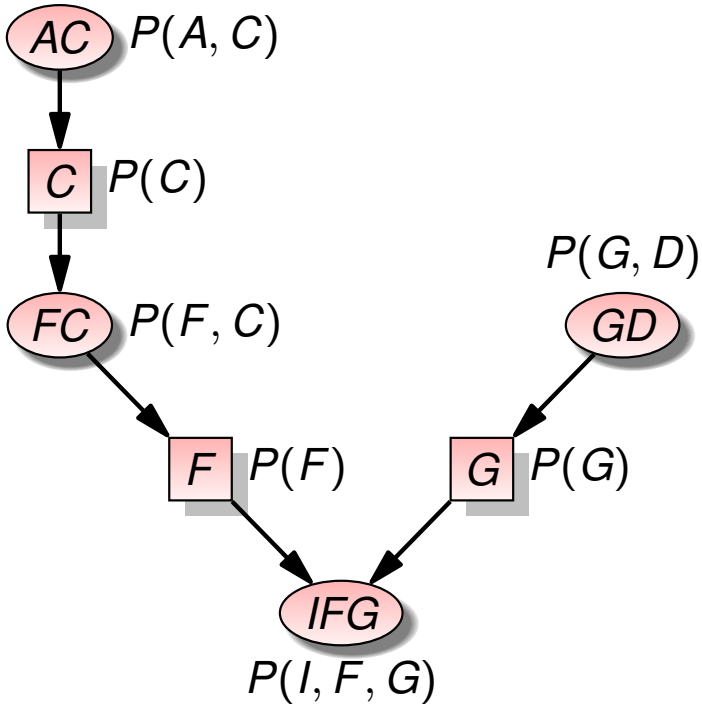


Shafer-Shenoy : élimination de $A \Longrightarrow P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

élimination de $C \Longrightarrow P(F, C, e_A) = P(F|C)P(C, e_A)$

De Shafer-Shenoy à Jensen





Shafer-Shenoy : élimination de $A \Longrightarrow P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

élimination de $C \Longrightarrow P(F, C, e_A) = P(F|C)P(C, e_A)$

Jensen : élimination de $C \Longrightarrow P(F, C, e_A) = \dfrac{P(F, C)}{P(C)} P(C, e_A)$

Bibliographie

- Jensen F.V., Lauritzen S.L. et Olesen K.G. (1990) « Bayesian Updating in Causal Probabilistic Networks by Local Computations », Computational Statistics Quarterly, 4 :269–282
- Lauritzen S.L. et Spiegelhalter D.J. (1988) « Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems(with discussion) », Journal of the Royal Statistical Society, *Series B*, 50 :157–224
- Madsen A.L. et Jensen F.V. (1998) « Lazy Propagation in Junction Trees », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Madsen A.L. et Jensen F.V. (1999) « Lazy Propagation : A Junction Tree Inference Algorithm Based on Lazy Evaluation », Artificial Intelligence, 113 :203–245