# cours 7
# Inférences et observations

Aix*Marseille université Initiative d'excellence — Master SID — Raisonnement dans l'incertain

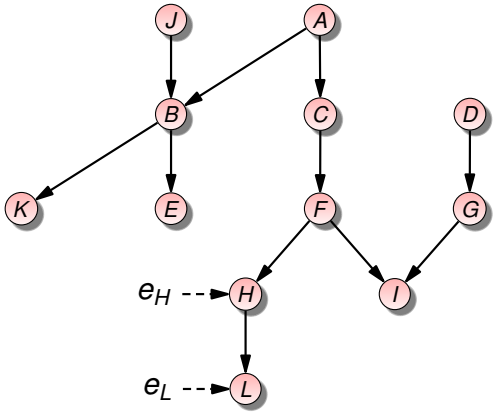
©CG(2026)

## Soyons observateur : les probabilités a posteriori

Nous observons des informations $e_H$ sur $H$ et $e_L$ sur $L$.

On veut connaître $P(I|e_H, e_L)$

$\Longrightarrow$ on va calculer $P(I, e_H, e_L)$ car c'est plus simple






## Quelles sont ces informations ?

*Teneur des informations*

informations = observations :

$e_L$ = « $L$ ne peut plus prendre les valeurs $l_1$ et $l_4$ »

*Entrée de ces observations :* $P(e_L|L)$



## Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$ ? (1/2)

observation : $e_L$ = « Le capteur m'indique que $L$ ne peut plus prendre les valeurs $l_1$ et $l_4$ »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0 & l_1 \\ \hline 1 & l_2 \\ \hline 1 & l_3 \\ \hline 0 & l_4 \\ \hline \end{array}$$

⚠ dimension de $P(e_L|L) = |L|$

## Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$ ? (2/2)

observation : $e_L$ = « Le capteur m'indique que $L$ a pris la valeur $l_2$. Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|l} \hline 0.1 & l_1 \\ \hline 0.9 & l_2 \\ \hline 0.1 & l_3 \\ \hline 0 & l_4 \\ \hline \end{array}$$



## Hypothèses et conséquences (1/3)

**Hypothèse**

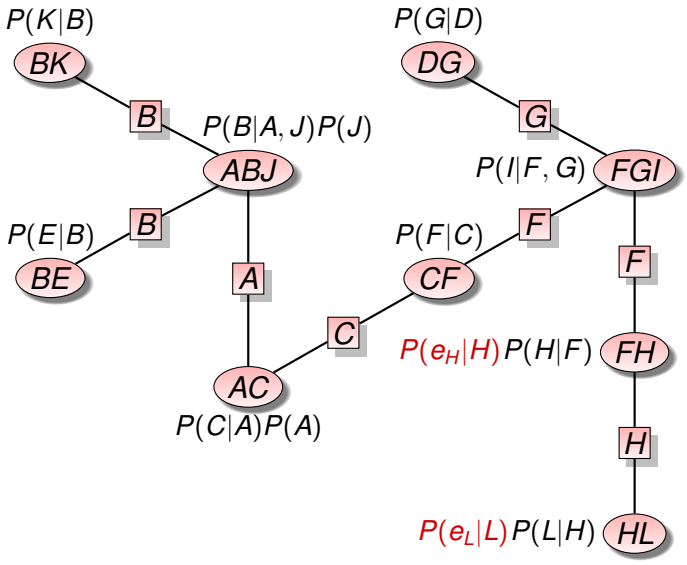
Toute information $e_X$ sur un nœud $X$ est indépendante du reste du réseau bayésien conditionnellement à $X$.

**Conséquence**

$$\begin{aligned} &P(A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,e_H,e_L) = \\ &\quad P(e_H|A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,e_L)\times \\ &\quad P(e_L|A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L)\times \\ &\quad P(A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L) \\ &= P(e_H|H)P(e_L|L)P(A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L) \end{aligned}$$



## Hypothèses et conséquences (2/3)






## Hypothèses et conséquences (3/3)

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique $FGI$ : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\Longrightarrow P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\Longrightarrow P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

Or $P(e_H, e_L) = \sum_I P(I, e_H, e_L)$

Donc $P(I|e_H, e_L) = \dfrac{P(I, e_H, e_L)}{\sum_I P(I, e_H, e_L)}$.

## Résumé sur l'algorithme de Shafer-Shenoy

*Algorithme de Shafer-Shenoy*

Pour calculer une proba *a posteriori* $P(Y|e)$ :

1. construire l'arbre de jonction
2. insérer les probas conditionnelles du réseau bayésien dans les cliques
3. insérer des tables contenant uniquement des 1 dans les séparateurs
4. pour chaque information $e_X$, calculer $P(e_X|X)$ et insérer cette proba dans une clique contenant $X$
5. envoyer les messages dans l'arbre de jonction
6. choisir une clique contenant $Y$, faire le produit de sa table de proba par tous les messages qui lui ont été envoyés, puis sommer sur toutes les variables $\neq Y \Longrightarrow P(Y, e)$
7. normaliser $P(Y, e) \Longrightarrow P(Y|e)$

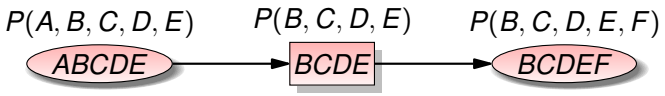


2. Existe-t-il d'autres

algorithmes d'inférence ?



## De Shafer-Shenoy à Lazy propagation




si $P(A, B, C, D, E) = P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

alors $P(B, C, D, E) = \sum_A P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

$$= \left(\sum_A P(A)P(C|A, B)\right) P(B)P(D)P(E|C, D)$$

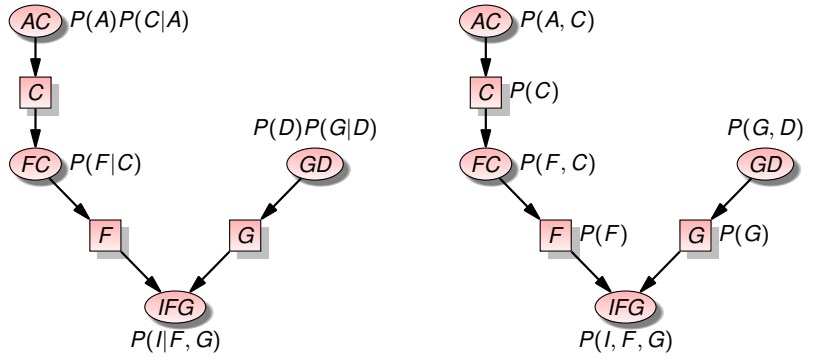
$\Longrightarrow$ on a intérêt à ne pas effectuer les produits avant les sommes

*Lazy propagation*

Principe : garder les produits sous forme de listes et n'effectuer les multiplications que lorsque c'est nécessaire.



## De Shafer-Shenoy à Jensen




*Shafer-Shenoy :* élimination de $A \Longrightarrow P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

élimination de $C \Longrightarrow P(F, C, e_A) = P(F|C)P(C, e_A)$

*Jensen :* élimination de $C \Longrightarrow P(F, C, e_A) = \frac{P(F, C)}{P(C)} P(C, e_A)$

# Bibliographie


- Jensen F.V., Lauritzen S.L. et Olesen K.G. (1990) « Bayesian Updating in Causal Probabilistic Networks by Local Computations », Computational Statistics Quarterly, 4 :269–282
- Lauritzen S.L. et Spiegelhalter D.J. (1988) « Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems(with discussion) », Journal of the Royal Statistical Society, *Series B*, 50 :157–224
- Madsen A.L. et Jensen F.V. (1998) « Lazy Propagation in Junction Trees », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Madsen A.L. et Jensen F.V. (1999) « Lazy Propagation : A Junction Tree Inference Algorithm Based on Lazy Evaluation », Artificial Intelligence, 113 :203–245