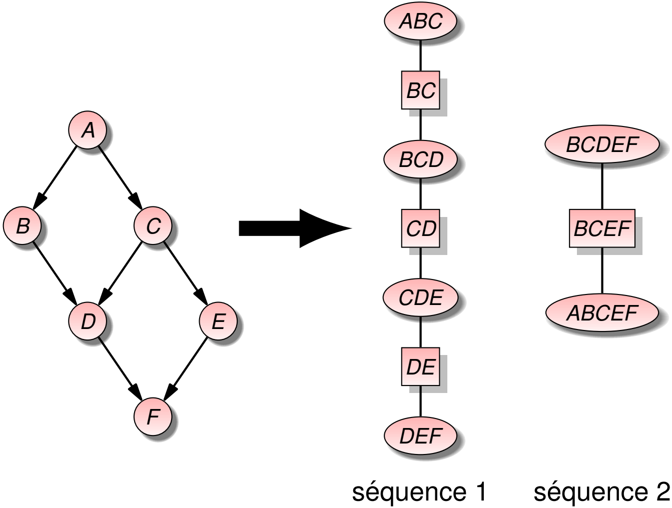
cours 6
Construction de l'arbre de jonction

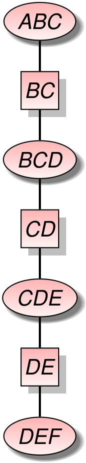
Master SID — Raisonnement dans l'incertain

Toutes les séquences d'élimination ne sont pas égales

Séquence 1 : A, B, C, F, D, E **Séquence 2 :** D, C, A, E, B, F

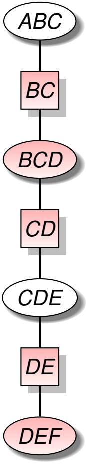


De la propriété d'intersection courante



Propriété d'intersection courante

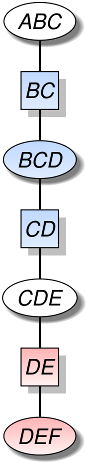
Soient C_1 et C_2 deux cliques quelconques de l'arbre de jonction et soit $S = C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Alors sur toute chaîne reliant C_1 et C_2, les cliques et séparateurs contiennent S



Propriété d'intersection courante

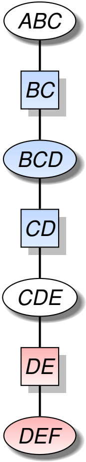
Soient C_1 et C_2 deux cliques quelconques de l'arbre de jonction et soit $S = C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Alors sur toute chaîne reliant C_1 et C_2, les cliques et séparateurs contiennent S

De la propriété d'intersection courante



Propriété d'intersection courante

Soient C_1 et C_2 deux cliques quelconques de l'arbre de jonction et soit $S = C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Alors sur toute chaîne reliant C_1 et C_2, les cliques et séparateurs contiennent S



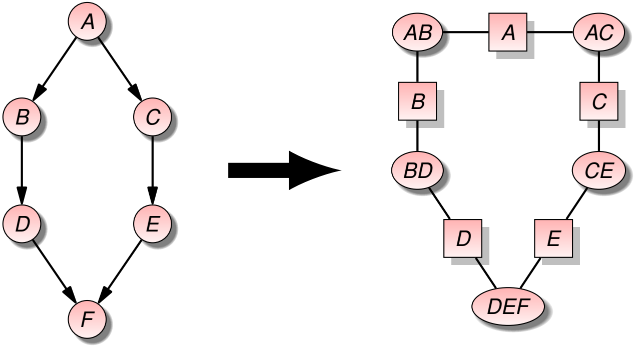
Propriété d'intersection courante

Soient C_1 et C_2 deux cliques quelconques de l'arbre de jonction et soit $S = C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Alors sur toute chaîne reliant C_1 et C_2, les cliques et séparateurs contiennent S

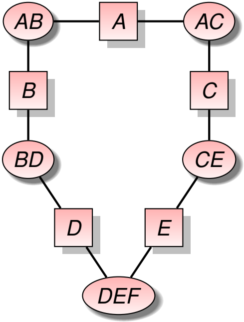
Théorème

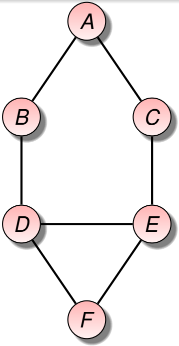
L'algorithme de Shafer-Shenoy fonctionne avec n'importe quel graphe sans cycle vérifiant la propriété d'intersection courante (ce que l'on appelle un *join tree*)

Un graphe de jonction avec cycles



Si l'on n'y prend garde, des cycles peuvent exister bien que la propriété d'intersection courante soit vérifiée

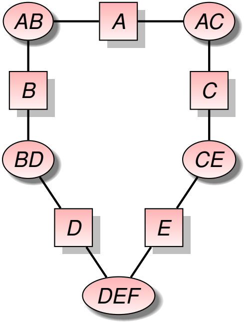


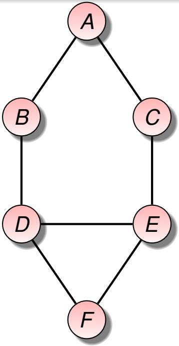


Triangulation

Un graphe non orienté est triangulé si et seulement si, pour tout cycle de longueur 4 ou plus, il existe une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux nœuds non consécutifs du cycle

Graphe de jonction et triangulation (1/2)



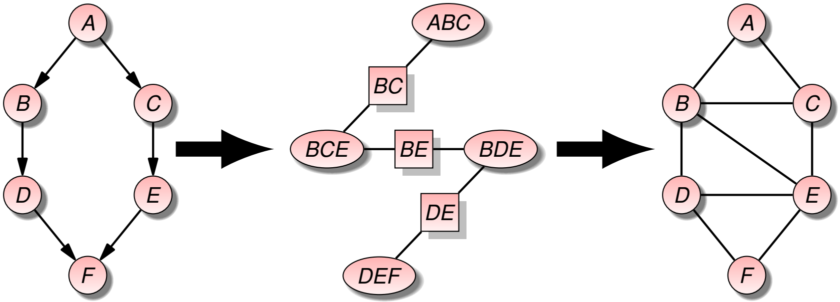


Triangulation

Un graphe non orienté est triangulé si et seulement si, pour tout cycle de longueur 4 ou plus, il existe une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux nœuds non consécutifs du cycle

Exemple : le graphe ci-dessus n'est pas triangulé car le cycle A, B, D, E, C, A ne comporte pas de corde

Graphe de jonction et triangulation (2/2)

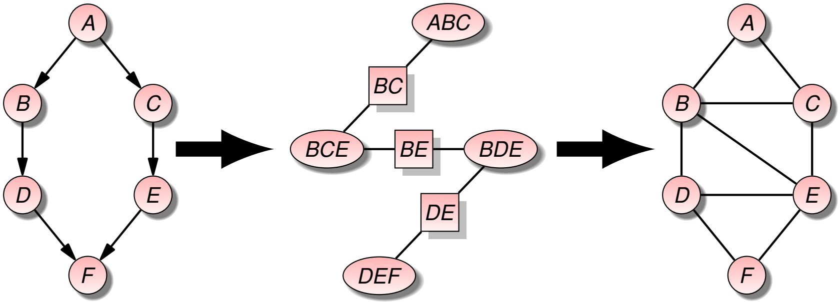


Proposition

il y a équivalence entre les deux assertions :

1. Le graphe de jonction est acyclique
2. Le graphe non orienté correspondant est triangulé

Graphe de jonction et triangulation (2/2)



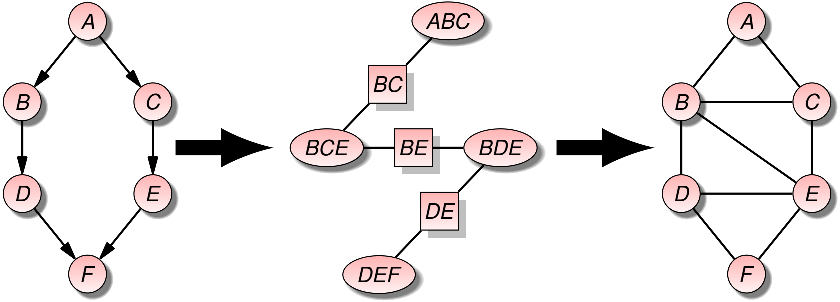
Proposition

il y a équivalence entre les deux assertions :

1. Le graphe de jonction est acyclique
2. Le graphe non orienté correspondant est triangulé

$\Longrightarrow$ pour trouver un ≪ bon ≫ arbre de jonction, il faut trouver une ≪ bonne ≫ triangulation

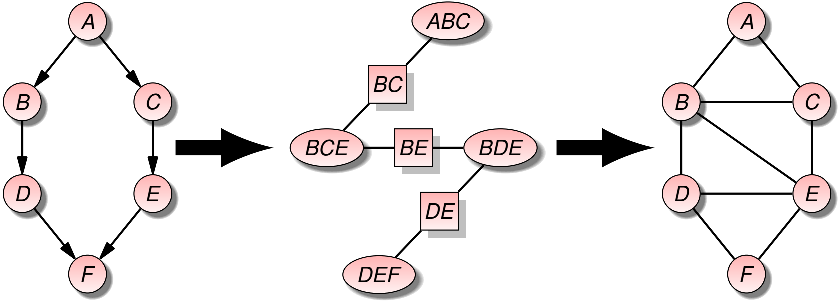
Un peu de morale, ça ne fait pas de mal



Moralisation

relier tous les parents d'un même nœud, puis supprimer les orientations $\Longrightarrow$ le graphe moral.

Un peu de morale, ça ne fait pas de mal



Moralisation

relier tous les parents d'un même nœud, puis supprimer les orientations $\Longrightarrow$ le graphe moral.

$\Longrightarrow$ les cliques pourront contenir l'ensemble des probabilités conditionnelles de la décomposition de la loi jointe

Proposition *[Rose 1970]*

Un graphe non orienté est triangulé si et seulement si l'application des deux règles suivantes permet d'éliminer tous les nœuds X_i du graphe sans rajouter une seule arête :

1. on rajoute des arêtes entre tous les voisins du nœud X_i que l'on veut éliminer (on forme une clique)
2. on supprime X_i ainsi que les arêtes qui lui sont adjacentes du graphe

$\Longrightarrow$ pour créer un join tree, il suffit de partir d'un graphe non orienté et d'appliquer, avec une certaine séquence d'élimination, les deux points ci-dessus

[Mellouli (87)] : Tout join tree ≪ optimal ≫ peut être construit à partir d'une séquence d'élimination

Recherche des triangulations optimales (2/2)

- *Arnborg et al. (87) :* trouver la triangulation optimale est NP-difficile $\Longrightarrow$ essayer de trouver des heuristiques

Recherche des triangulations optimales (2/2)

- *Arnborg et al. (87) :* trouver la triangulation optimale est NP-difficile $\Longrightarrow$ essayer de trouver des heuristiques

▶ *Kjærulff (90) :* un algorithme glouton rapide et efficace :
Soit un graphe non orienté (moral) $G = (X, E)$, $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$

1. Associer à chaque X_i un « poids » égal au produit des modalités de X_i et de ses voisins
2. éliminer le nœud X_i dont le poids est minimal (i.e., relier tous ses voisins de manière à former une clique C_i puis éliminer X_i et ses arêtes adjacentes)
3. mettre à jour les poids des nœuds restants

$\Longrightarrow$ les C_i sont les cliques (ellipses) du join tree

Recherche des triangulations optimales (2/2)

- *Arnborg et al. (87) :* trouver la triangulation optimale est NP-difficile $\Longrightarrow$ essayer de trouver des heuristiques

▶ *Kjærulff (90) :* un algorithme glouton rapide et efficace :
Soit un graphe non orienté (moral) $G = (X, E)$, $X = \{X_1, \dots, X_n\}$

1. Associer à chaque X_i un « poids » égal au produit des modalités de X_i et de ses voisins
2. éliminer le nœud X_i dont le poids est minimal (i.e., relier tous ses voisins de manière à former une clique C_i puis éliminer X_i et ses arêtes adjacentes)
3. mettre à jour les poids des nœuds restants

$\Longrightarrow$ les C_i sont les cliques (ellipses) du join tree

▶ *van den Eijkhof & Bodlaender (2002) :* "safe reductions"
$\Longrightarrow$ élimination de variables avec garantie d'optimalité

Recherche des triangulations optimales (2/2)

- *Arnborg et al. (87) :* trouver la triangulation optimale est NP-difficile $\Longrightarrow$ essayer de trouver des heuristiques

▸ *Kjærulff (90) :* un algorithme glouton rapide et efficace :
Soit un graphe non orienté (moral) $G = (X, E)$, $X = \{X_1, \dots, X_n\}$

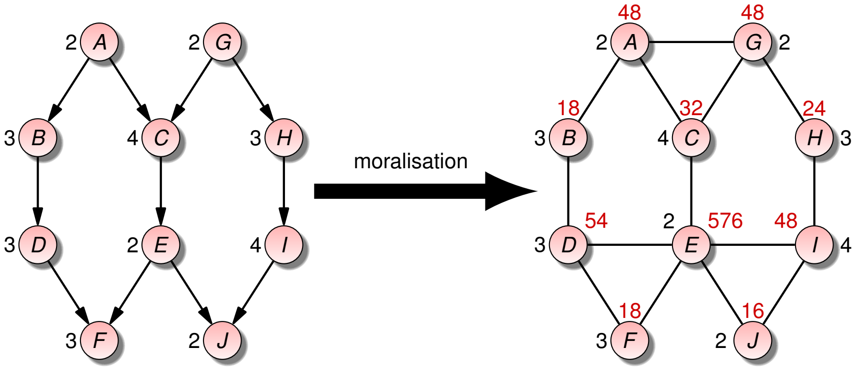
1. Associer à chaque X_i un « poids » égal au produit des modalités de X_i et de ses voisins
2. éliminer le nœud X_i dont le poids est minimal (i.e., relier tous ses voisins de manière à former une clique C_i puis éliminer X_i et ses arêtes adjacentes)
3. mettre à jour les poids des nœuds restants

$\Longrightarrow$ les C_i sont les cliques (ellipses) du join tree

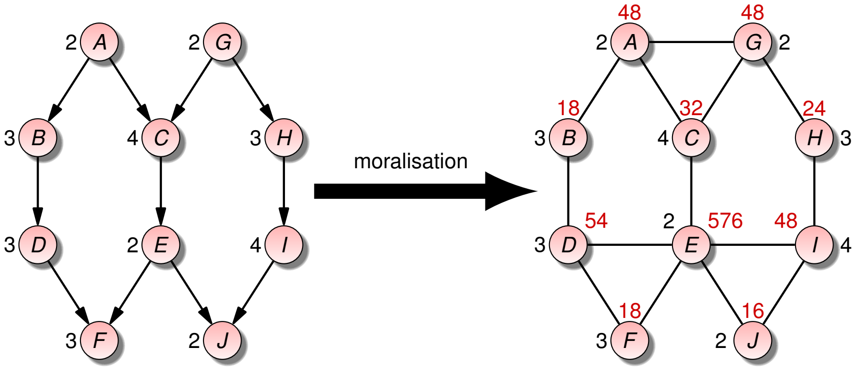
▸ *van den Eijkhof & Bodlaender (2002) :* "safe reductions"
$\Longrightarrow$ élimination de variables avec garantie d'optimalité

▸ Autres algorithmes : Becker & Geiger (96) ; Shoiket & Geiger (87)

Exemple de création de join tree (1/5)

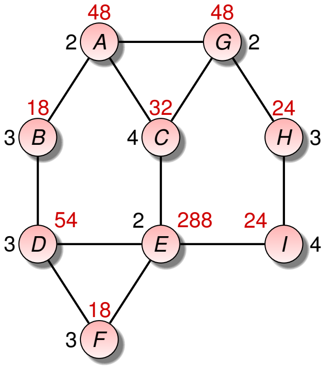


Exemple de création de join tree (1/5)

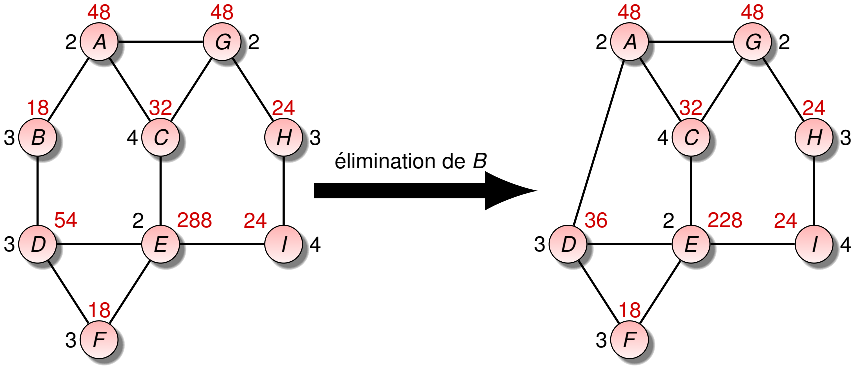


- Variable à éliminer : $J \Longrightarrow$ clique EIJ

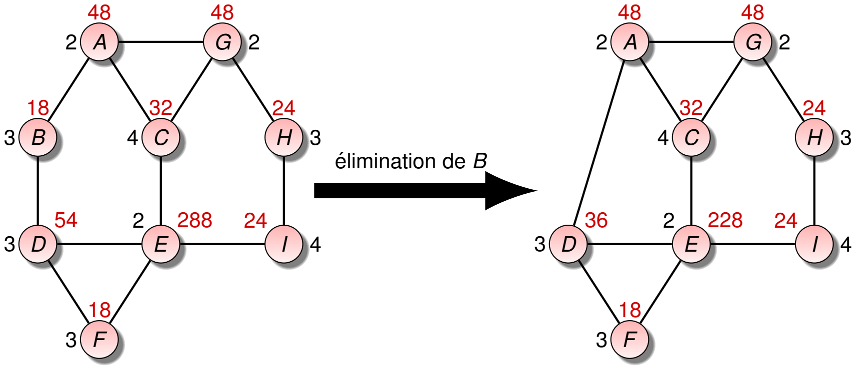
Exemple de création de join tree (2/5)



Exemple de création de join tree (2/5)

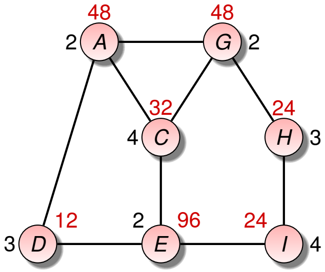


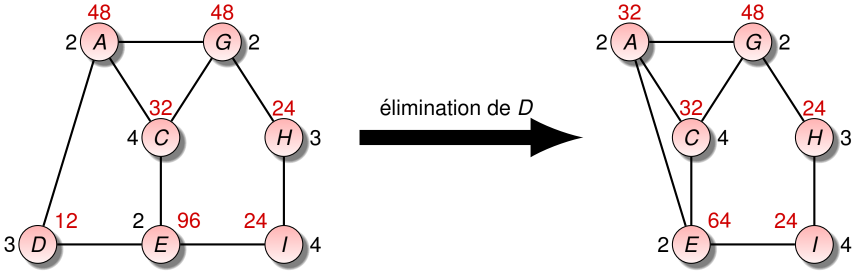
- première variable à éliminer : $B \Longrightarrow$ clique ABD



- première variable à éliminer : $B \Longrightarrow$ clique ABD
- deuxième variable à éliminer : $F \Longrightarrow$ clique DEF

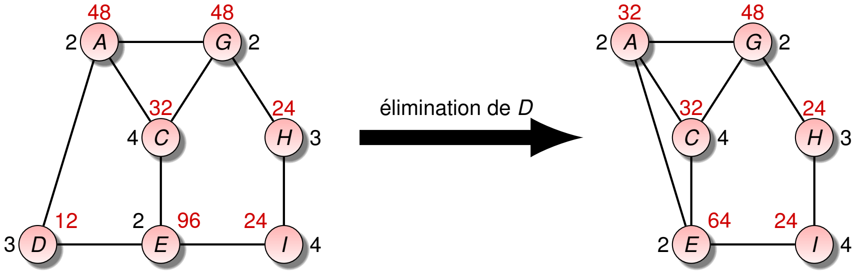
Exemple de création de join tree (3/5)





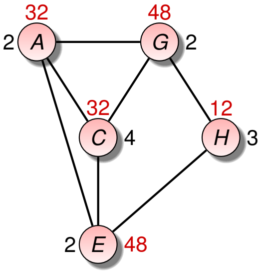
- première variable à éliminer : $D \Longrightarrow$ clique ADE

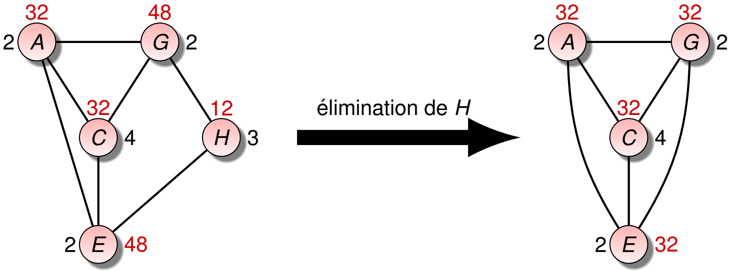
Exemple de création de join tree (3/5)



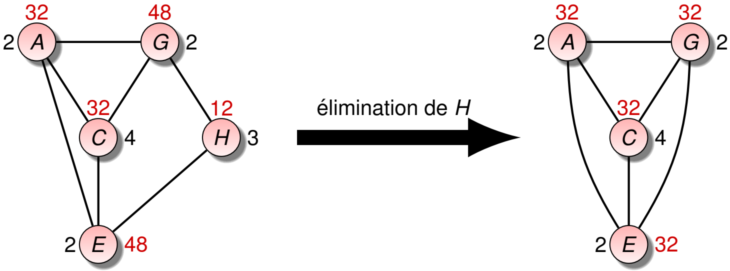
- première variable à éliminer : $D \Longrightarrow$ clique ADE
- deuxième variable à éliminer : $I \Longrightarrow$ clique EHI

Exemple de création de join tree (4/5)





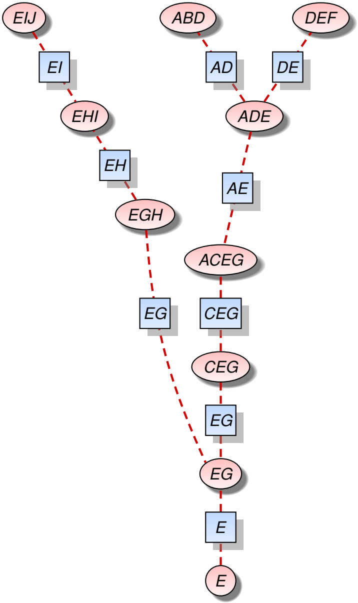
- première variable à éliminer : $H \Longrightarrow$ clique EGH



- première variable à éliminer : $H \Longrightarrow$ clique EGH
- puis les autres variables peuvent être éliminées dans n'importe quel ordre puisqu'elles appartiennent toutes à la même clique : $A \Longrightarrow$ clique $ACEG$
  $C \Longrightarrow$ clique CEG
  $G \Longrightarrow$ clique EG
  $E \Longrightarrow$ clique E

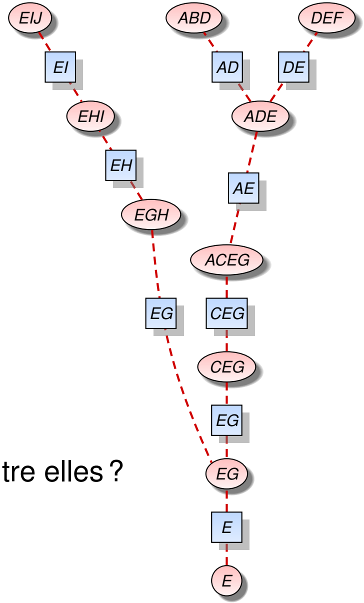
Exemple de création de join tree (5/5)

Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) : *EIJ* (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)



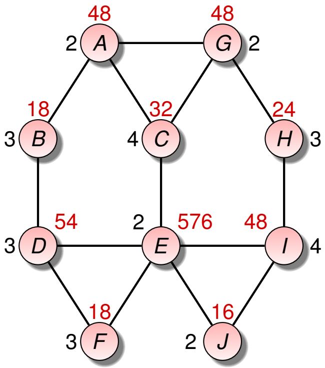
Exemple de création de join tree (5/5)

Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

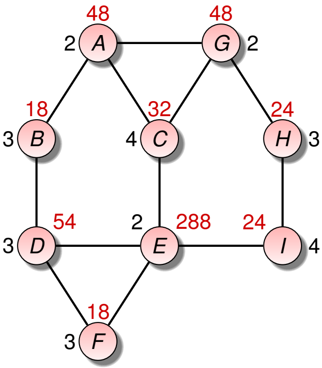


Problème : comment relier les cliques entre elles ?

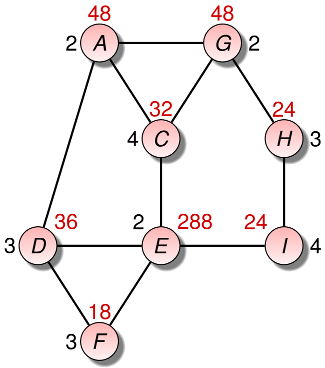
- élimination de J



- élimination de B

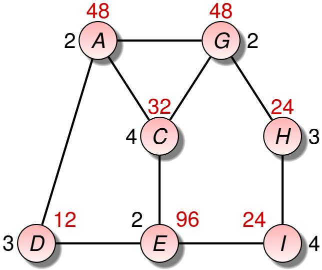


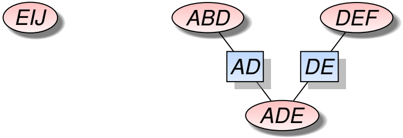
- élimination de F



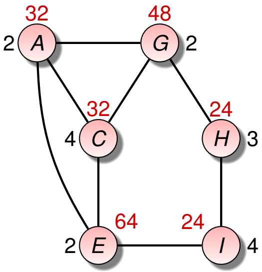
L'arbre d'élimination en résumé

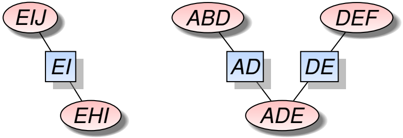
- élimination de *D*



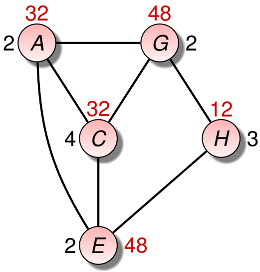


- élimination de I



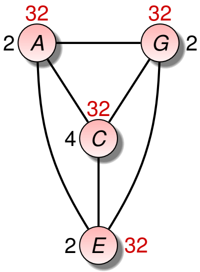


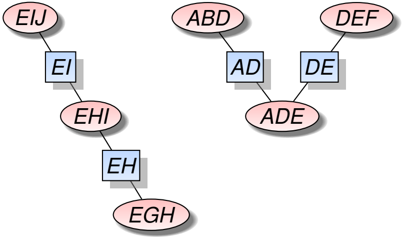
- élimination de H



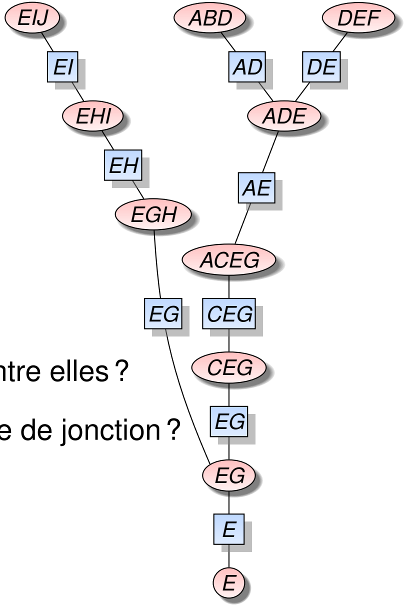
L'arbre d'élimination en résumé

- élimination de A, C, G, E





- arbre d'élimination :



Problèmes :

1. Comment relier les cliques entre elles ?
2. Comment en déduire un arbre de jonction ?

Des cliques vers l'arbre d'élimination (1/2)

Définition de l'arbre d'élimination

- Soit $\sigma : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ la permutation telle que les variables X_i sont éliminées dans l'ordre $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$

Des cliques vers l'arbre d'élimination (1/2)

Définition de l'arbre d'élimination

- Soit $\sigma : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ la permutation telle que les variables X_i sont éliminées dans l'ordre $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$
- Pour tout i, soit $D_{\sigma(i)}$ la clique créée au moment où $X_{\sigma(i)}$ est éliminée

Des cliques vers l'arbre d'élimination (1/2)

Définition de l'arbre d'élimination

- Soit $\sigma : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ la permutation telle que les variables X_i sont éliminées dans l'ordre $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$
- Pour tout i, soit $D_{\sigma(i)}$ la clique créée au moment où $X_{\sigma(i)}$ est éliminée
- Arbre d'élimination : graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,

Des cliques vers l'arbre d'élimination (1/2)

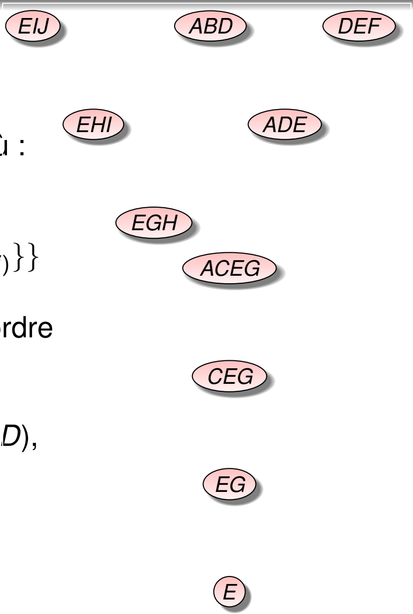
Définition de l'arbre d'élimination

- Soit $\sigma : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ la permutation telle que les variables X_i sont éliminées dans l'ordre $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$
- Pour tout i, soit $D_{\sigma(i)}$ la clique créée au moment où $X_{\sigma(i)}$ est éliminée
- Arbre d'élimination : graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) :$
    $1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

Définition de l'arbre d'élimination

- Soit $\sigma : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ la permutation telle que les variables X_i sont éliminées dans l'ordre $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$
- Pour tout i, soit $D_{\sigma(i)}$ la clique créée au moment où $X_{\sigma(i)}$ est éliminée
- Arbre d'élimination : graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) :$
    $$1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$$

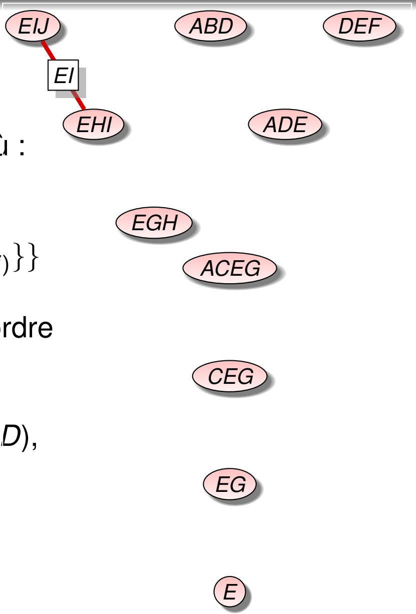
$\Longrightarrow$ Si l'on trie les nœuds X_i à l'intérieur des cliques selon leur ordre d'élimination, alors :
on relie $D_{\sigma(i)} = \{X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)}, \ldots\}$ à $D_{\sigma(j)}$.



- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \dots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

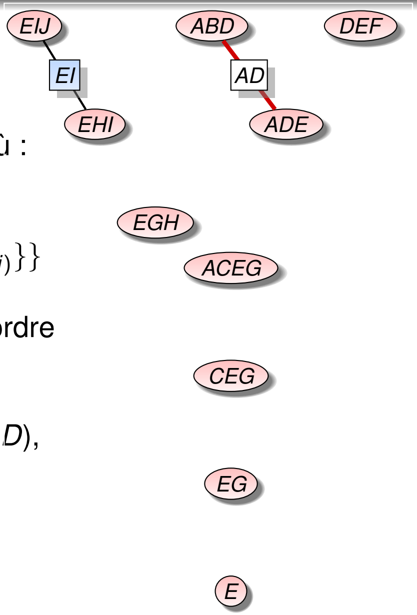
Des cliques vers l'arbre d'élimination (2/2)



- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \dots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

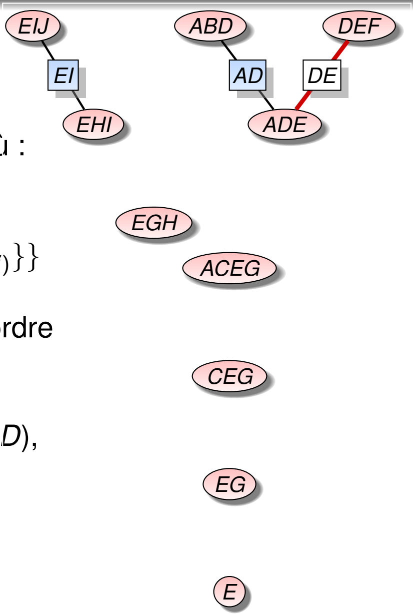
Des cliques vers l'arbre d'élimination (2/2)



- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \dots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

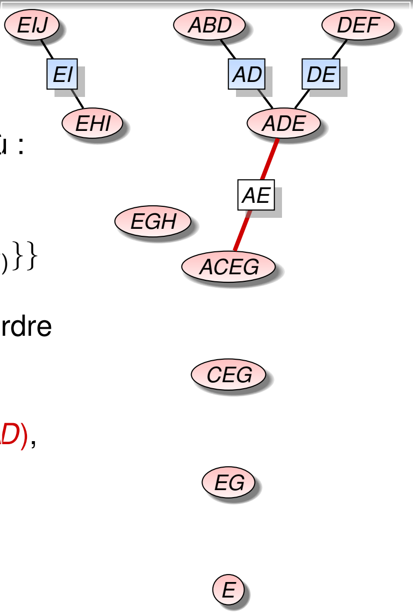
- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

Des cliques vers l'arbre d'élimination (2/2)



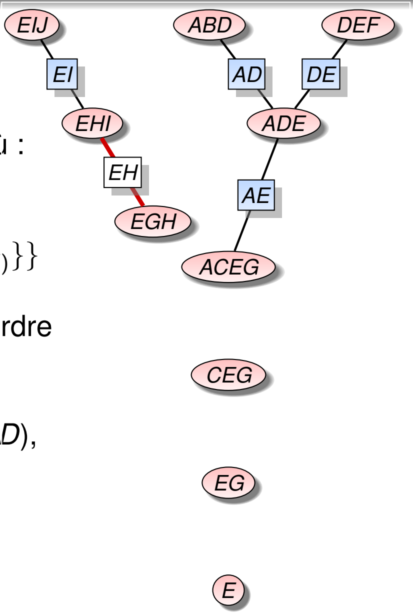
- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

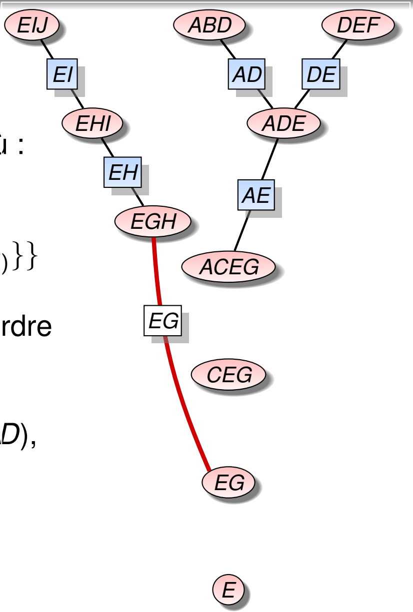


- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*),
  EHI (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*),
  CEG (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

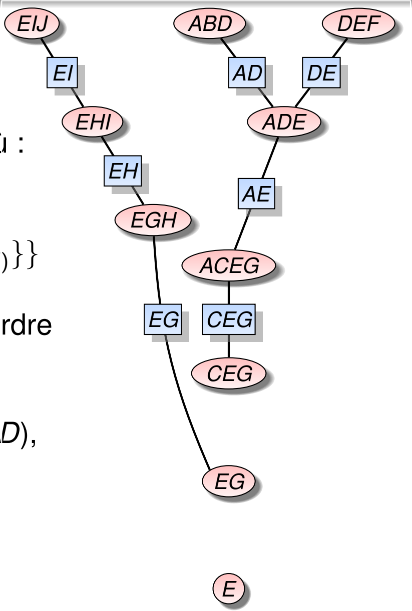


- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$
- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*),
  EHI (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*),
  CEG (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)



- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) : *EIJ* (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

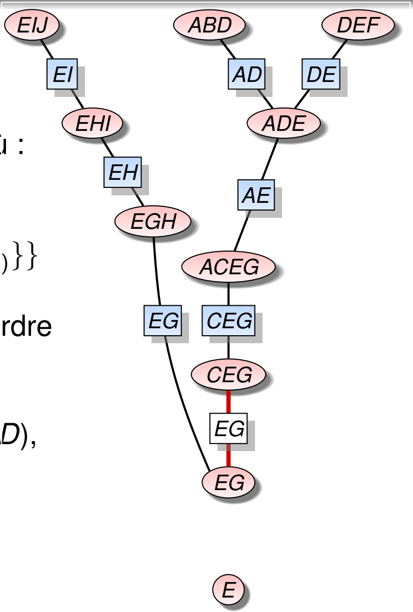


- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \dots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

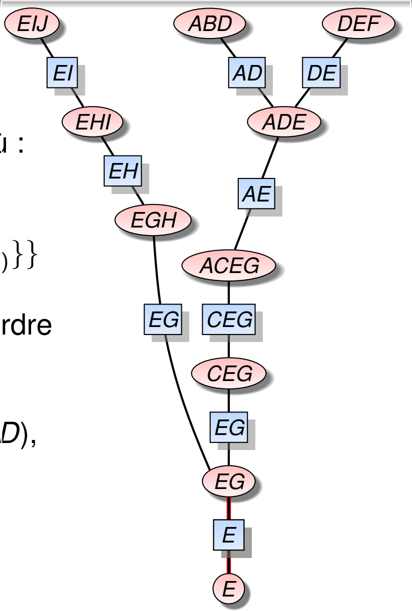
- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)

- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

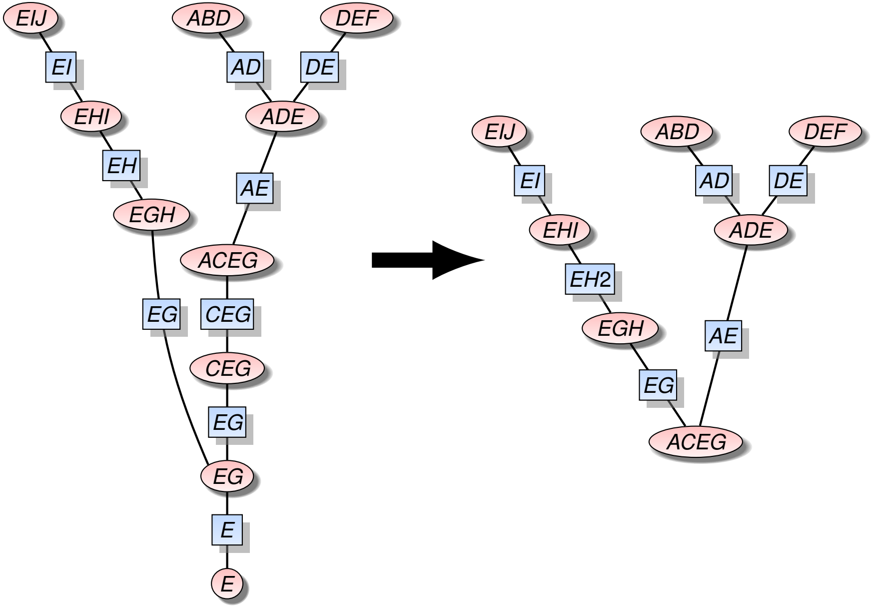
- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)



- Arbre d'élimination : $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$, où :
  - $\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
  - $\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n,$
    $j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$
- Ensemble des cliques selon leur ordre de création (avec la variable dont l'élimination a créé la clique) :
  EIJ (*J*), *ABD* (*B*), *DEF* (*F*), *ADE* (*D*), *EHI* (*I*), *EGH* (*H*), *ACEG* (*A*), *CEG* (*C*), *EG* (*G*), *E* (*E*)



De l'arbre d'élimination vers l'arbre de jonction (1/2)



Propriétés de l'arbre d'élimination

Propriétés

$\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
$\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

1. L'arbre d'élimination est un arbre

Propriétés

$\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
$\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

1. L’arbre d’élimination est un arbre
2. Il vérifie la propriété d’intersection courante

Propriétés de l'arbre d'élimination

Propriétés

$\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
$\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

1. L'arbre d'élimination est un arbre
2. Il vérifie la propriété d'intersection courante
3. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $|D_{\sigma(j)}| \geq |D_{\sigma(i)}| - 1$

Propriétés

$\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
$\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

1. L'arbre d'élimination est un arbre
2. Il vérifie la propriété d'intersection courante
3. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $|D_{\sigma(j)}| \geq |D_{\sigma(i)}| - 1$
4. Soient $D_{\sigma(i)}$ et $D_{\sigma(j)}$ les parents de $D_{\sigma(k)}$, alors $D_{\sigma(i)} \not\subset D_{\sigma(j)}$ et $D_{\sigma(j)} \not\subset D_{\sigma(i)}$

Propriétés de l'arbre d'élimination

Propriétés

$\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$,
$\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

1. L'arbre d'élimination est un arbre
2. Il vérifie la propriété d'intersection courante
3. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $|D_{\sigma(j)}| \geq |D_{\sigma(i)}| - 1$
4. Soient $D_{\sigma(i)}$ et $D_{\sigma(j)}$ les parents de $D_{\sigma(k)}$, alors $D_{\sigma(i)} \not\subset D_{\sigma(j)}$ et $D_{\sigma(j)} \not\subset D_{\sigma(i)}$
5. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $D_{\sigma(j)} \subset D_{\sigma(i)} \iff |D_{\sigma(j)}| = |D_{\sigma(i)}| - 1$

Propriétés de l'arbre d'élimination

Propriétés

$\mathcal{D} = \{D_{\sigma(i)} : i \in \{1, \dots, n\}\}$,
$\mathcal{E} = \{(D_{\sigma(i)}, D_{\sigma(j)}) : 1 \leq i < n, j = min\{k \neq i : X_{\sigma(k)} \in D_{\sigma(i)}\}\}$

1. L'arbre d'élimination est un arbre
2. Il vérifie la propriété d'intersection courante
3. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $|D_{\sigma(j)}| \geq |D_{\sigma(i)}| - 1$
4. Soient $D_{\sigma(i)}$ et $D_{\sigma(j)}$ les parents de $D_{\sigma(k)}$, alors $D_{\sigma(i)} \not\subset D_{\sigma(j)}$ et $D_{\sigma(j)} \not\subset D_{\sigma(i)}$
5. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$, alors $D_{\sigma(j)} \subset D_{\sigma(i)} \iff |D_{\sigma(j)}| = |D_{\sigma(i)}| - 1$
6. Soit $D_{\sigma(j)}$ un enfant de $D_{\sigma(i)}$ tel que $D_{\sigma(j)} \not\subset D_{\sigma(i)}$, alors il n'existe pas d'ancêtre $D_{\sigma(k)}$ de $D_{\sigma(i)}$ tel que $D_{\sigma(j)} \subset D_{\sigma(k)}$

Algorithme pour obtenir un arbre de jonction

créer l'arbre d'élimination $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$
marquer à **false** tous les arcs de $\mathcal{E}$
pour i variant de n à 1 **faire**
    si il existe $D_{\sigma(j)}$ parent de $D_{\sigma(i)}$ tel que l'arc $(D_{\sigma(j)}, D_{\sigma(i)})$ est non marqué et $|D_{\sigma(i)}| = |D_{\sigma(j)}| - 1$ **alors**
        pour tous les autres parents $D_{\sigma(k)}$ de $D_{\sigma(i)}$ **faire**
            créer dans $\mathcal{G}$ un arc $(D_{\sigma(k)}, D_{\sigma(j)})$
            marquer cet arc à `true`
        fait
    si $D_{\sigma(i)}$ a un enfant $D_{\sigma(k)}$ **alors**
        créer dans $\mathcal{G}$ un arc $(D_{\sigma(j)}, D_{\sigma(k)})$
    finsi
    supprimer $D_{\sigma(i)}$ ainsi que ses arcs adjacents
fait

De l'arbre d'élimination vers l'arbre de jonction (2/2)

Algorithme pour obtenir un arbre de jonction

```
créer l'arbre d'élimination 𝒢 = (𝒟, ℰ)
marquer à false tous les arcs de ℰ
pour i variant de n à 1 faire
    si il existe D_σ(j) parent de D_σ(i) tel que l'arc
    (D_σ(j), D_σ(i)) est non marqué et |D_σ(i)| = |D_σ(j)| − 1 alors
        pour tous les autres parents D_σ(k) de D_σ(i) faire
            créer dans 𝒢 un arc (D_σ(k), D_σ(j))
            marquer cet arc à true
        fait
    si D_σ(i) a un enfant D_σ(k) alors
        créer dans 𝒢 un arc (D_σ(j), D_σ(k))
    finsi
    supprimer D_σ(i) ainsi que ses arcs adjacents
fait
```

A la fin de l'algorithme ci-dessus, $\mathcal{G}$ est un arbre de jonction.

Bibliographie

- Becker A. et Geiger D. (1996) « A sufficiently fast algorithm for finding close to optimal junction trees », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Flores J., Gámez J. et Olesen, K. (2003) « Incremental compilation of Bayesian networks », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Jensen F.V. et Jensen F. (1994) « Optimal junction trees », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- Kjærulff U. (1990) « Triangulation of graphs – Algorithms giving small total state space », technical report, Aalborg University
- Kjærulff U. (1991) « Optimal decomposition of probabilistic networks by simulated annealing », Statistics and Computing, 2 :7–17
- Leimer H.-G. (1993) « Optimal decomposition by clique separators », Discrete Mathematics, 113 :99–123

Bibliographie

- Lepar V. et Shenoy P.P. (1998) « A Comparison of Lauritzen-Spiegelhalter, Hugin and Shenoy-Shafer Architectures for Computing Marginals of Probability Distributions », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence, 328–337
- Olesen K. et Madsen A. (1999) « Maximal prime decomposition of Bayesian networks », technical report.
- Shoikhet K. et Geiger D. (1997) « Finding optimal triangulations via minimal vertex separators », Proccedings of the International Conference on Artificial Intelligence
- van den Eijkhof F. et Bodlaender A. (2002) « Safe reduction rules for weighted treewidth », Proceedings of the 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, 2573 :176–185