

cours 5

Algorithme de Shafer-Shenoy



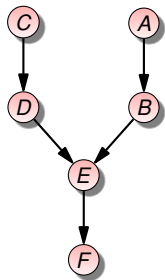
Master SID — Raisonnement dans l'incertain

diagnostic

- ▶ *diagnostic de panne*
- ▶ *sûreté de fonctionnement*
- ▶ *filtrage de spams*

prédiction

- ▶ *modélisation de joueurs*
- ▶ *prévisions boursières*



Définition

Inférence : calculer des probabilités :

- ▶ marginales ($P(X)$), jointes ($P(X, Y)$)
- ▶ *a priori* ($P(X)$, $P(X, Y)$), *a posteriori* ($P(X|e)$, $P(X, Y|e)$)

Définition

Inférence : calculer des probabilités :

- ▶ marginales ($P(X)$), jointes ($P(X, Y)$)
- ▶ *a priori* ($P(X)$, $P(X, Y)$), *a posteriori* ($P(X|e)$, $P(X, Y|e)$)
- ▶ **Applications** : prédiction, diagnostic

Définition

Inférence : calculer des probabilités :

- ▶ marginales ($P(X)$), jointes ($P(X, Y)$)
- ▶ *a priori* ($P(X)$, $P(X, Y)$), *a posteriori* ($P(X|e)$, $P(X, Y|e)$)
- ▶ **Applications** : prédiction, diagnostic
- ▶ **Les algorithmes d'inférence** :

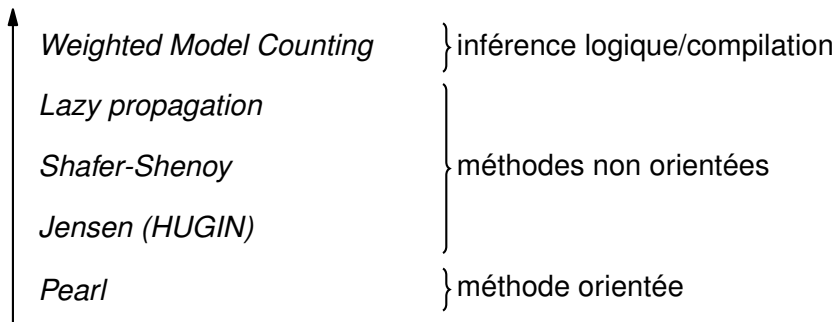
Définition

Inférence : calculer des probabilités :

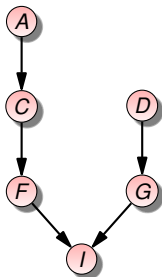
- ▶ marginales ($P(X)$), jointes ($P(X, Y)$)
- ▶ *a priori* ($P(X)$, $P(X, Y)$), *a posteriori* ($P(X|e)$, $P(X, Y|e)$)

▶ **Applications** : prédiction, diagnostic

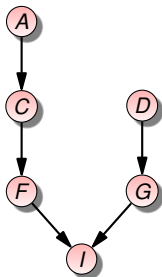
▶ **Les algorithmes d'inférence** :



$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$



$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$



Calcul de $P(I)$?

$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$P(I) = \sum_G \left(\sum_F \left(\sum_D \left(\sum_C \left(\sum_A P(A, C, D, F, G, I) \right) \right) \right) \right)$$

$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$P(I) = \sum_G \left(\sum_F \left(\sum_D \left(\sum_C \left(\sum_A P(A, C, D, F, G, I) \right) \right) \right) \right)$$

$$\sum_A P(A, C, D, F, G, I) = \underbrace{\left(\sum_A P(A)P(C|A) \right)}_{P(C)} P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$P(I) = \sum_G \left(\sum_F \left(\sum_D \left(\sum_C \left(\sum_A P(A, C, D, F, G, I) \right) \right) \right) \right)$$

$$\sum_A P(A, C, D, F, G, I) = P(C)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$P(I) = \sum_G \left(\sum_F \left(\sum_D \left(\sum_C \left(\sum_A P(A, C, D, F, G, I) \right) \right) \right) \right)$$

$$\sum_A P(A, C, D, F, G, I) = P(C)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

$$\sum_C \sum_A P(A, C, D, F, G, I) = \underbrace{\left(\sum_C P(C)P(F|C) \right)}_{P(F)} P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

Séquence d'élimination

A C D F G

$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

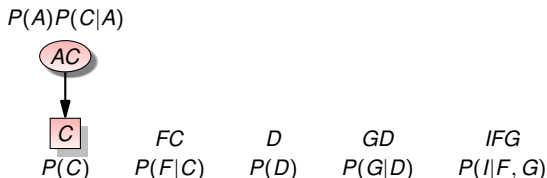
A	AC	FC	D	GD	IFG
$P(A)$	$P(C A)$	$P(F C)$	$P(D)$	$P(G D)$	$P(I F, G)$

$$\text{somme sur } A \implies P(C) = \sum_A P(A)P(C|A)$$

Séquence d'élimination

A C D F G

$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

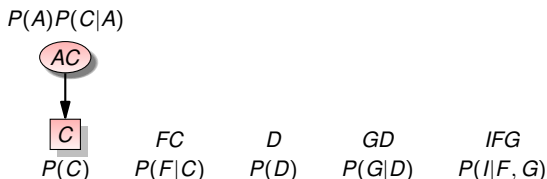


$$\text{somme sur } A \implies P(C) = \sum_A P(A)P(C|A)$$

Séquence d'élimination

A C D F G

$$P(C, D, F, G, I) = P(C)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

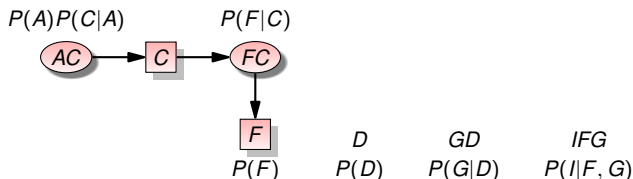


$$\text{somme sur } C \implies P(F) = \sum_C P(C)P(F|C)$$

Séquence d'élimination

A C D F G

$$P(C, D, F, G, I) = P(C)P(F|C) P(D)P(G|D)P(I|F, G)$$

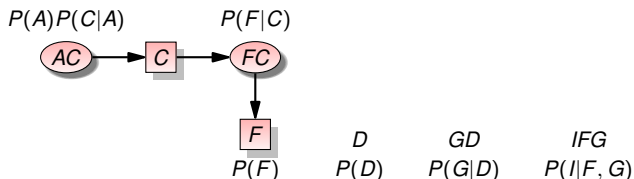


$$\text{somme sur } C \implies P(F) = \sum_C P(C)P(F|C)$$

Séquence d'élimination

A C **D** F G

$$P(D, F, G, I) = P(F) P(D)P(G|D) P(I|F, G)$$

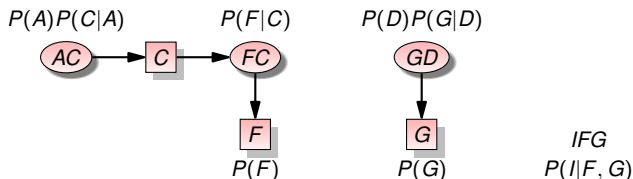


$$\text{somme sur } D \implies P(G) = \sum_D P(D)P(G|D)$$

Séquence d'élimination

A C **D** F G

$$P(D, F, G, I) = P(F) P(D)P(G|D) P(I|F, G)$$

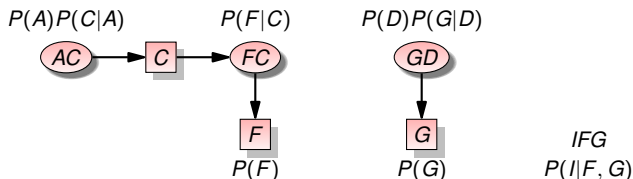


$$\text{somme sur } D \implies P(G) = \sum_D P(D)P(G|D)$$

Séquence d'élimination

A C D **F** G

$$P(D, F, G, I) = P(F)P(I|F, G)P(G)$$

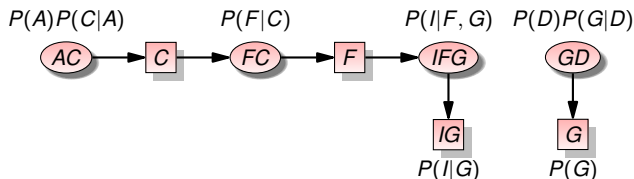


$$\text{somme sur } F \implies P(I|G) = \sum_F P(F)P(I|F, G)$$

Séquence d'élimination

A C D **F** G

$$P(D, F, G, I) = P(F)P(I|F, G)P(G)$$

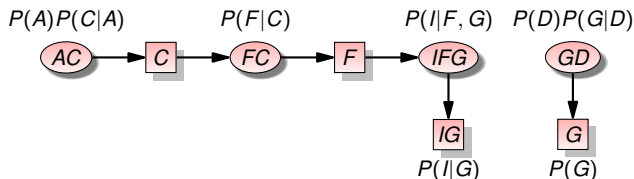


$$\text{somme sur } F \implies P(I|G) = \sum_F P(F)P(I|F, G)$$

Séquence d'élimination

A C D F **G**

$$P(D, F, G, I) = P(I|G)P(G)$$

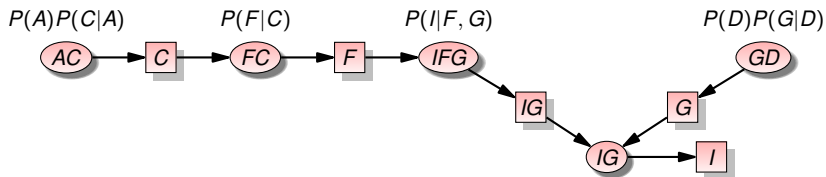


$$\text{somme sur } G \implies P(I) = \sum_G P(G)P(I|G)$$

Séquence d'élimination

A C D F **G**

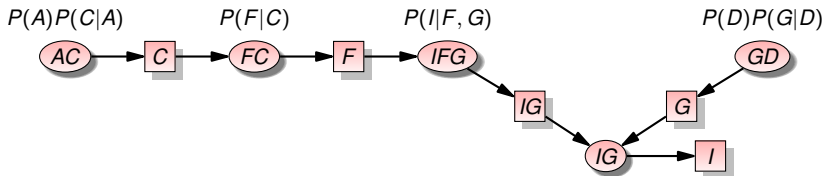
$$P(D, F, G, I) = P(I|G)P(G)$$



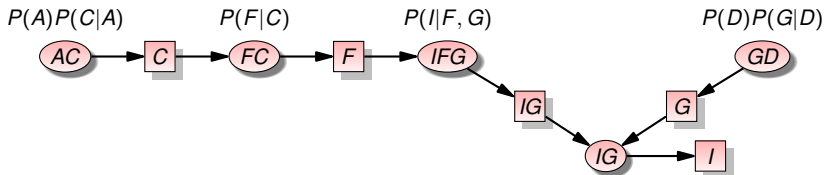
$$\text{somme sur } G \implies P(I) = \sum_G P(G)P(I|G)$$

Shafer-Shenoy graphique (6/6)

Le graphe final obtenu par Shafer-Shenoy



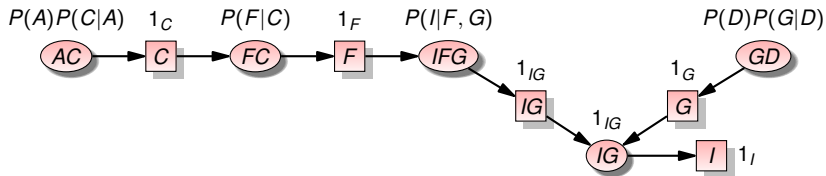
Le graphe final obtenu par Shafer-Shenoy



Algorithme de Shafer-Shenoy

- 1 Se donner une séquence d'élimination des nœuds
 \implies *join tree, junction tree*
- 2 propager les impacts dans le sens des flèches :
 - ▶ dans les ellipses (cliques), on effectue des multiplications (combinaisons),
 - ▶ dans les rectangles (séparateurs), on effectue des additions (projections).

Quelques remarques sur Shafer-Shenoy (1/3)

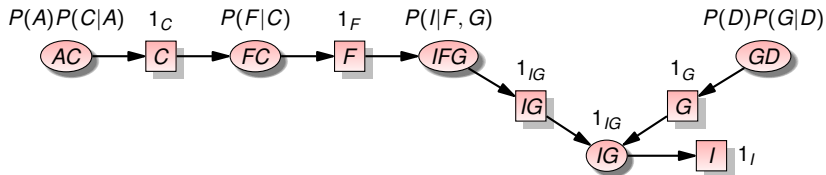


- 1 Loi jointe des variables = produit de fonctions des cliques et des séparateurs :

$$P(A, C, D, F, G, I) =$$

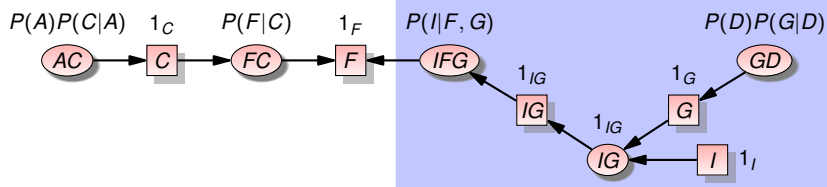
$$P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G).$$

Quelques remarques sur Shafer-Shenoy (1/3)



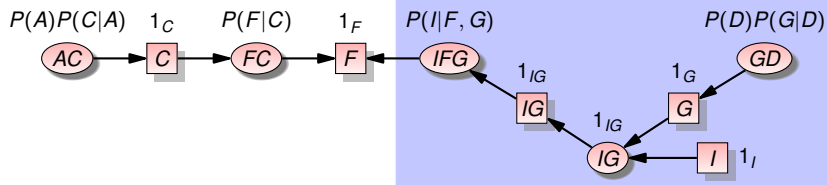
- 1 Loi jointe des variables = produit de fonctions des cliques et des séparateurs :
$$P(A, C, D, F, G, I) = P(A)P(C|A)P(F|C)P(D)P(G|D)P(I|F, G).$$
- 2 Si l'on élimine récursivement des cliques et séparateurs « externes », c'est-à-dire n'ayant qu'un voisin, le produit des fonctions des cliques et des séparateurs restants est la loi jointe des variables restantes.

Quelques remarques sur Shafer-Shenoy (2/3)

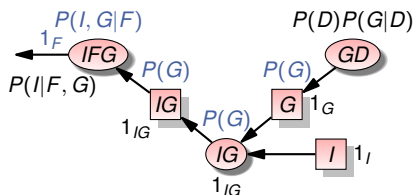


$$P(A) \times P(C|A) \times P(F|C) \times 1_C \times 1_F = P(A, C, F).$$

Quelques remarques sur Shafer-Shenoy (2/3)



$$P(A) \times P(C|A) \times P(F|C) \times 1_C \times 1_F = P(A, C, F).$$



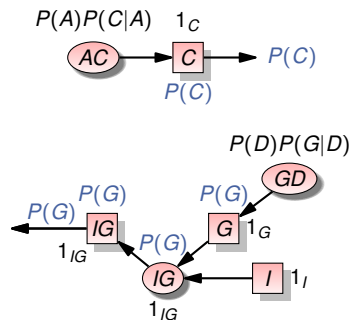
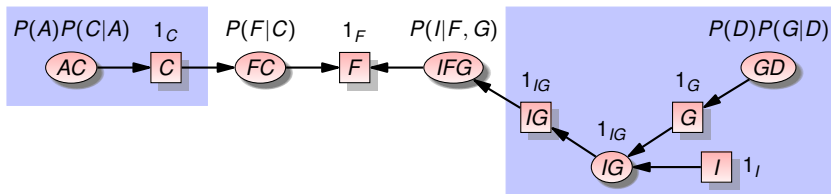
séparateur G : $\sum_D P(D)P(G|D)$

clique IG : $P(G) \times 1_{IG} \times 1_G \times 1_I$

clique IFG : $\sum_{IG} P(I|F, G) \times P(G)$

\implies en sortie de IFG : 1_F

Quelques remarques sur Shafer-Shenoy (3/3)



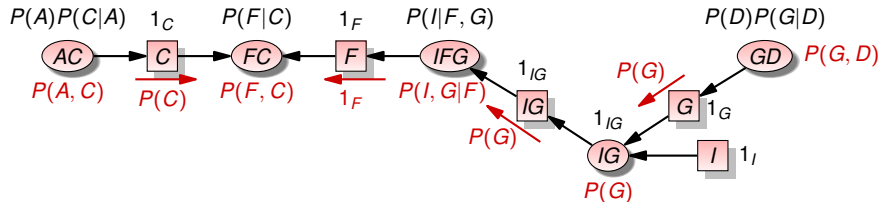
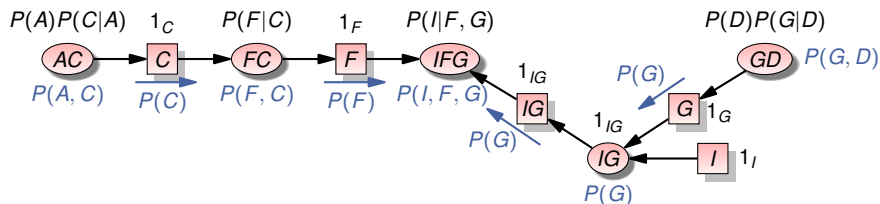
Produit des cliques et séparateurs restants :

$$P(C) P(F|C) 1_F P(I|F, G) P(G) \\ = P(I, C, F, G)$$

Conclusion : on peut utiliser le même graphe pour calculer toutes les probabilités marginales

C'est pas le deux en un, mais le tout en deux (1/3)

En bleu : les calculs de $P(I, F, G)$, en rouge, ceux de $P(F, C)$

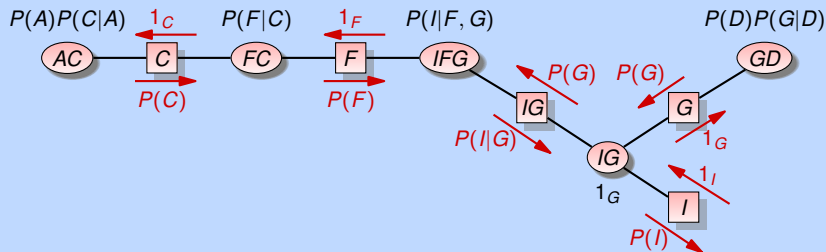


Algorithme de Shafer-Shenoy

- 1 Chaque séparateur contient deux messages initialisés à 1, un en direction de chaque clique voisine.
- 2 Chaque nœud du join tree envoie des messages vers ses voisins en respectant les deux règles suivantes :
 - 1 avant d'envoyer un message vers son voisin X , le nœud Y attend que tous ses autres voisins lui aient envoyé leur message.
 - 2 le message d'un nœud Y vers son voisin X est le produit de tous les messages reçus par Y , à l'exception de celui envoyé par X , et de la table stockée par Y , le tout marginalisé sur X (c'est-à-dire sommé sur les variables de $Y \setminus X$).

C'est pas le deux en un, mais le tout en deux (3/3)

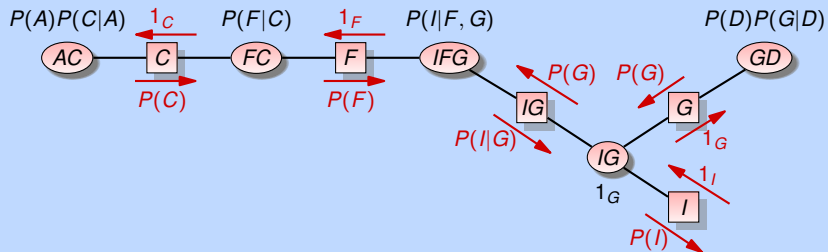
Algorithme de Shafer-Shenoy



À la fin de l'algorithme, pour tout nœud X , le produit de la table stockée en X par l'ensemble des messages envoyés à X est la probabilité jointe des variables de X .

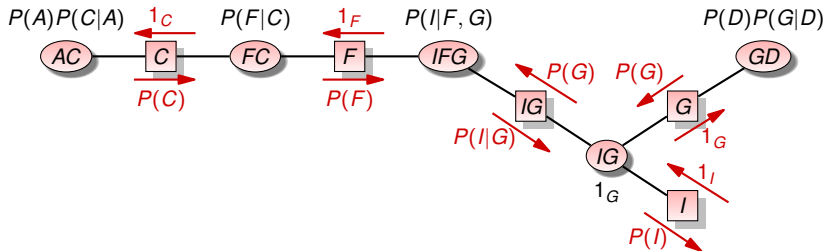
Shafer-Shenoy : ce qu'il faut retenir

Algorithme de Shafer-Shenoy

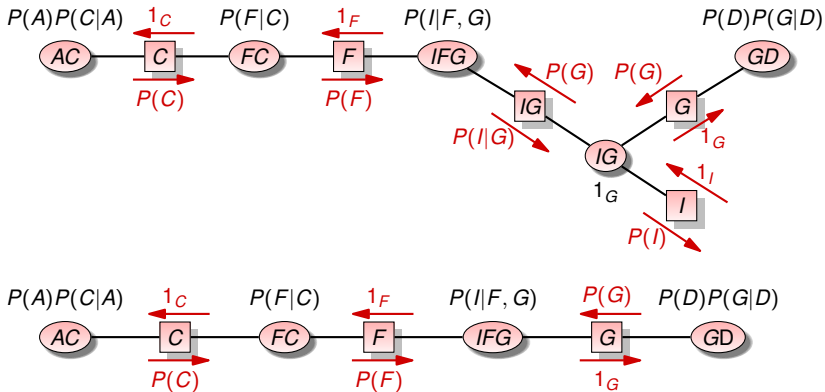


- ▶ cliques = ellipses, séparateurs = rectangles
- ▶ algorithme par envoi de messages
- ▶ opérateurs = + sur les séparateurs, × sur les cliques

Les arbres de jonction



Les arbres de jonction

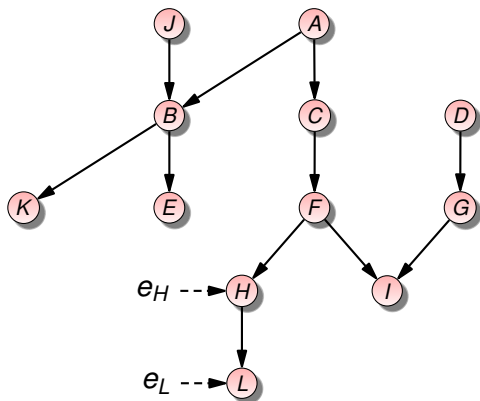


arbre de jonction : suppression des cliques incluses dans d'autres cliques

Soyons observateur : les probabilités a posteriori

Nous observons des informations e_H sur H et e_L sur L .

On veut connaître $P(I|e_H, e_L)$

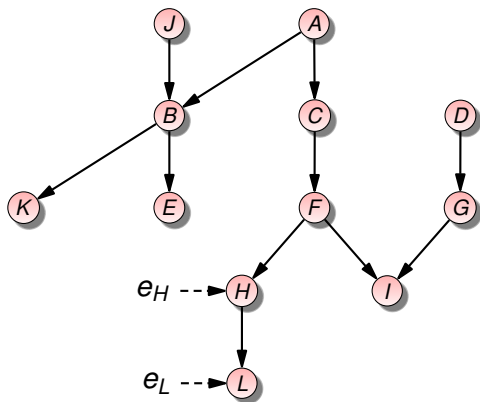


Soyons observateur : les probabilités a posteriori

Nous observons des informations e_H sur H et e_L sur L .

On veut connaître $P(I|e_H, e_L)$

⇒ on va calculer $P(I, e_H, e_L)$ car c'est plus simple



Quelles sont ces informations ?

Teneur des informations

informations = observations :

$e_L = \ll L \text{ ne peut plus prendre les valeurs } l_1 \text{ et } l_4 \gg$

Quelles sont ces informations ?

Teneur des informations

informations = observations :

$e_L = \ll L \text{ ne peut plus prendre les valeurs } l_1 \text{ et } l_4 \gg$

Entrée de ces observations : $P(e_L|L)$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et $l_4 \gg$

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et $l_4 \gg$

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline ? \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et $l_4 \gg$

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & l_1 \\ \hline 1 & l_2 \\ \hline ? & l_3 \\ \hline & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et $l_4 \gg$

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & l_1 \\ \hline 1 & l_2 \\ \hline 1 & l_3 \\ \hline ? & l_4 \\ \hline \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et $l_4 \gg$

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (1/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L ne peut plus prendre les valeurs l_1 et $l_4 \gg$

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$



dimension de $P(e_L|L) = |L|$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : $e_L =$ « Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2 . Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. »

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2 . Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. \gg

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline 0.1 \\ \hline ? \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2 . Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. \gg

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline 0.1 \\ \hline 0.9 \\ \hline ? \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2 . Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. \gg

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline 0.1 \\ \hline 0.9 \\ \hline 0.1 \\ \hline ? \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Vous avez dit calcul de $P(e_L|L)$? (2/2)

observation : $e_L = \ll$ Le capteur m'indique que L a pris la valeur l_2 . Mais je n'ai pas totalement confiance en ce capteur. Je pense qu'il y a 90% de chances pour que $L = l_2$, mais il y a également 10% de chances que $L = l_1$ ou que $L = l_3$. \gg

$$P(e_L|L) = \begin{array}{|c|} \hline 0.1 \\ \hline 0.9 \\ \hline 0.1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}$$

Hypothèse

Toute information e_X sur un nœud X est indépendante du reste du réseau bayésien conditionnellement à X .

Hypothèse

Toute information e_X sur un nœud X est indépendante du reste du réseau bayésien conditionnellement à X .

Conséquence

$$\begin{aligned} P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_H, e_L) = \\ P(e_H | A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_L) \times \\ P(e_L | A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \times \\ P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \end{aligned}$$

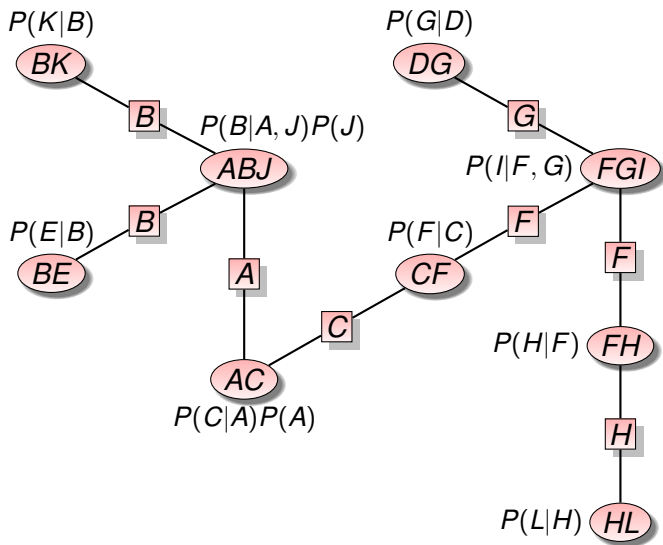
Hypothèse

Toute information e_X sur un nœud X est indépendante du reste du réseau bayésien conditionnellement à X .

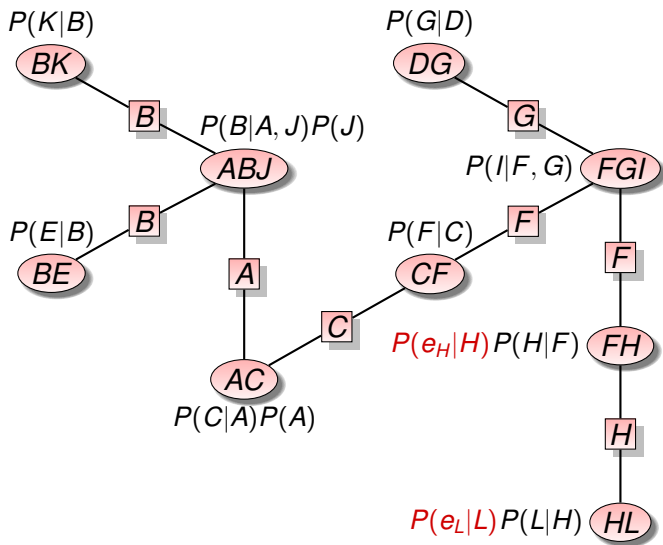
Conséquence

$$\begin{aligned} P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_H, e_L) &= \\ &P(e_H|A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, e_L) \times \\ &P(e_L|A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \times \\ &P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \\ &= P(e_H|H)P(e_L|L)P(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L) \end{aligned}$$

Hypothèses et conséquences (2/3)



Hypothèses et conséquences (2/3)



L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique $FGI : P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\implies P(I, e_H, e_L) =$$

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\implies P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\implies P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\implies P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\implies P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\implies P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

Or $P(e_H, e_L) =$

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\implies P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\implies P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

$$\text{Or } P(e_H, e_L) = \sum_I P(I, e_H, e_L)$$

L'algorithme de Shafer-Shenoy permet donc de calculer dans la clique FGI : $P(F, G, I, e_H, e_L)$

$$\implies P(I, e_H, e_L) = \sum_{F,G} P(F, G, I, e_H, e_L)$$

$$\implies P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{P(e_H, e_L)}$$

$$\text{Or } P(e_H, e_L) = \sum_I P(I, e_H, e_L)$$

$$\text{Donc } P(I|e_H, e_L) = \frac{P(I, e_H, e_L)}{\sum_I P(I, e_H, e_L)}.$$

Algorithme de Shafer-Shenoy

Pour calculer une proba *a posteriori* $P(Y|e)$:

- 1 construire l'arbre de jonction
- 2 insérer les probas conditionnelles du réseau bayésien dans les cliques
- 3 insérer des tables contenant uniquement des 1 dans les séparateurs
- 4 pour chaque information e_X , calculer $P(e_X|X)$ et insérer cette proba dans une clique contenant X
- 5 envoyer les messages dans l'arbre de jonction
- 6 choisir une clique contenant Y , faire le produit de sa table de proba par tous les messages qui lui ont été envoyés, puis sommer sur toutes les variables $\neq Y \implies P(Y, e)$
- 7 normaliser $P(Y, e) \implies P(Y|e)$

② Existe-t-il d'autres
algorithmes d'inférence ?

De Shafer-Shenoy à Lazy propagation



si $P(A, B, C, D, E) = P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

$$\begin{aligned} \text{alors } P(B, C, D, E) &= \sum P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D) \\ &= \left(\sum_A P(A)P(C|A, B) \right) P(B)P(D)P(E|C, D) \end{aligned}$$

De Shafer-Shenoy à Lazy propagation



si $P(A, B, C, D, E) = P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

$$\begin{aligned} \text{alors } P(B, C, D, E) &= \sum P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D) \\ &= \left(\sum_A P(A)P(C|A, B) \right) P(B)P(D)P(E|C, D) \end{aligned}$$

⇒ on a intérêt à ne pas effectuer les produits avant les sommes

De Shafer-Shenoy à Lazy propagation



si $P(A, B, C, D, E) = P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D)$

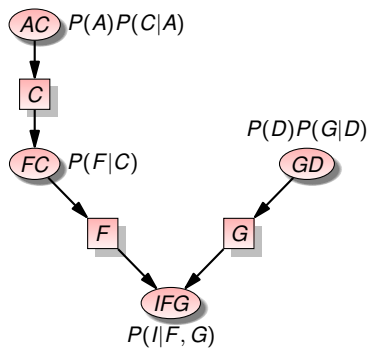
$$\begin{aligned} \text{alors } P(B, C, D, E) &= \sum P(A)P(B)P(C|A, B)P(D)P(E|C, D) \\ &= \left(\sum_A P(A)P(C|A, B) \right) P(B)P(D)P(E|C, D) \end{aligned}$$

⇒ on a intérêt à ne pas effectuer les produits avant les sommes

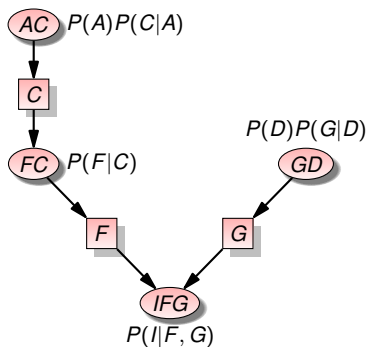
Lazy propagation

Principe : garder les produits sous forme de listes et n'effectuer les multiplications que lorsque c'est nécessaire.

De Shafer-Shenoy à Jensen

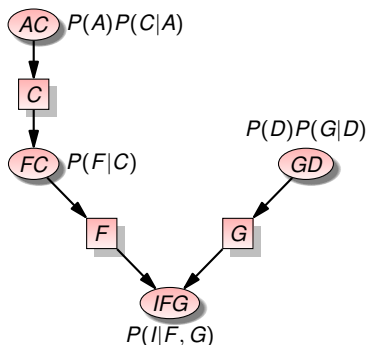


De Shafer-Shenoy à Jensen



Shafer-Shenoy : élimination de $A \implies P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

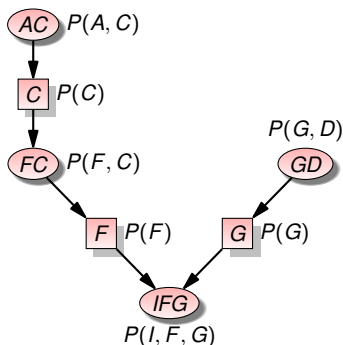
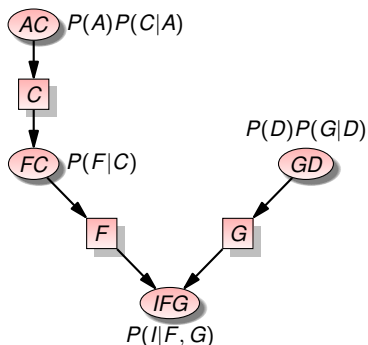
De Shafer-Shenoy à Jensen



Shafer-Shenoy : élimination de $A \implies P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

élimination de $C \implies P(F, C, e_A) = P(F|C)P(C, e_A)$

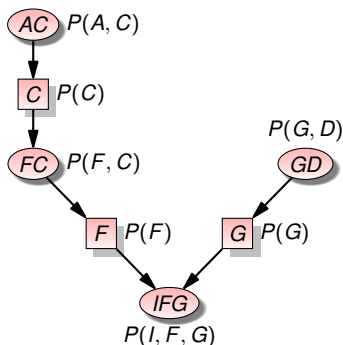
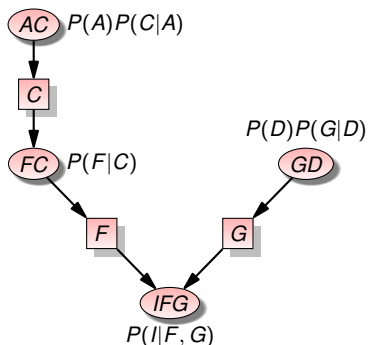
De Shafer-Shenoy à Jensen



Shafer-Shenoy : élimination de $A \implies P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

élimination de $C \implies P(F, C, e_A) = P(F|C)P(C, e_A)$

De Shafer-Shenoy à Jensen



Shafer-Shenoy : élimination de $A \implies P(C, e_A) = \sum_A P(A, e_A)P(C|A)$

élimination de $C \implies P(F, C, e_A) = P(F|C)P(C, e_A)$

Jensen : élimination de $C \implies P(F, C, e_A) = \frac{P(F, C)}{P(C)}P(C, e_A)$

- ▶ **Chavira M. et Darwiche A. (2008)** « On probabilistic inference by weighted model counting », *Artificial Intelligence* 172 :772–799
- ▶ **Dudek J.M., Phan V. et Vardi M.Y. (2020)** « ADDMC : Weighted Model Counting with Algebraic Decision Diagrams », *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence*, 1468–1476
- ▶ **Jensen F.V., Lauritzen S.L. et Olesen K.G. (1990)** « Bayesian Updating in Causal Probabilistic Networks by Local Computations », *Computational Statistics Quarterly*, 4 :269–282
- ▶ **Lauritzen S.L. et Spiegelhalter D.J. (1988)** « Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems(with discussion) », *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 50 :157–224

- ▶ **Madsen A.L. et Jensen F.V. (1998)** « **Lazy Propagation in Junction Trees** », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence
- ▶ **Madsen A.L. et Jensen F.V. (1999)** « **Lazy Propagation : A Junction Tree Inference Algorithm Based on Lazy Evaluation** », Artificial Intelligence, 113 :203–245
- ▶ **Marquis P. (2015)** « **Compile!** », Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence
- ▶ **Shafer G. (1996)** **Probabilistic expert systems**, Society for Industrial and Applied Mathematics
- ▶ **Shenoy P.P. et Shafer G. (1990)** « **Axioms for probability and belief-function propagation** », Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence, 169–198
- ▶ **Shenoy P.P. (1997)** « **Binary join trees for computing marginals in the Shenoy-Shafer architecture** », International Journal of Approximate Reasoning 17 :1–25