cours 2
Modèle probabiliste

Aix Marseille université Initiative d'excellence

Master SID — Raisonnement dans l'incertain

Définition des probabilités (Kolmogorov)

- Ω = ensemble fini ou dénombrable d'événements élémentaires e_k, $k \in K \subseteq \mathbb{N}$
- $\mathcal{A} = 2^\Omega$ = ensemble des événements
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $A = \bigcup_{k \in L} A_k$, avec L ensemble dénombrable et, $\forall j, k \in L, j \neq k, A_j \cap A_k = \emptyset$, $P(A) = \sum_{k \in L} P(A_k)$.

$\Longrightarrow$ Les probabilités des événements élémentaires déterminent entièrement P

- Exemple : Jet de dé à 6 faces : $e_k =$ « le dé atterrit sur la face k »

Variable aléatoire

Variable dont la valeur est déterminée après la réalisation d'une expérience aléatoire.

- Exemple : $D =$ « résultat d'un jet de dé »

  Domaine de $D = \Omega_D = \{1, \ldots, 6\}$

  $P(D = i) = \frac{1}{6} \; \forall \, i \in \{1, \ldots, 6\}$

$$P(A) = \sum_B P(A, B)$$

- Exemple :

	Hommes	Femmes
Petits	20	35
Grands	40	5

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

Interprétation : $P(A|B) =$ la proba de A sachant la valeur de B
$\Longrightarrow$ à droite du signe de conditionnement : connaissances

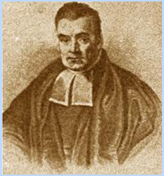
$$P(A, B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$\sum_{a \in \Omega_A} P(A = a) = 1$$

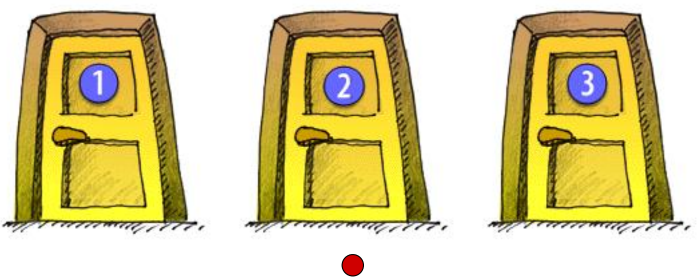
Théorème de Bayes

Pour tout A, B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

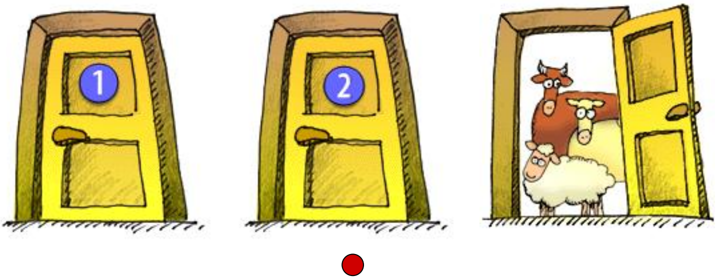


- Permet d'intervertir causes et conséquences http://www.apprendre-en-ligne.net/random/monty/



- derrière une des portes = 1 bateau
- derrière les autres portes : des moutons

proba que le bateau se trouve derrière la porte ?



L'animateur choisit au hasard une des 2 autres portes qui contient des moutons et l'ouvre.

Choix : conserver la porte 2 ou choisir la porte 1 ?

calculer la proba que le bateau soit derrière la porte 1 ou la 2

3 événements élémentaires :

- B1 : le bateau est derrière la porte 1
- B2 : le bateau est derrière la porte 2
- B3 : le bateau est derrière la porte 3

E = événement « l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3 »

Choix $\Longrightarrow P(B1|E)$ et $P(B2|E)$

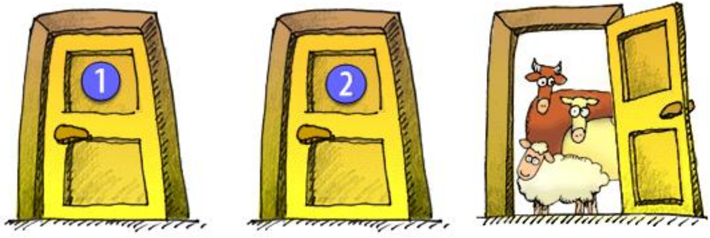
E = événement « l'animateur a choisi, parmi les portes 1 et 3, d'ouvrir la porte 3 »

Formule de Bayes : $P(B1|E) = \dfrac{P(E|B1)P(B1)}{P(E)}$

- $P(E|B1) = 1$
- $P(B1) = 1/3$
- $P(E) = P(E|B1)P(B1) + P(E|B2)P(B2) + P(E|B3)P(B3)$
  $= 1 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3 + 0 \times 1/3 = 1/2$

$$P(B1|E) = \frac{1 \times 1/3}{1/2} = 2/3$$

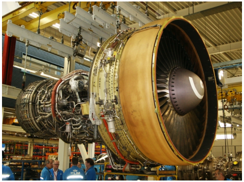
$P(B2|E) = 1 - P(B1|E) - P(B3|E) = 1/3$



$$P(B1|E) = 2/3$$

$$P(B2|E) = 1/3$$

Problématique : consommation mémoire excessive

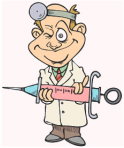


General Electric :

maintenance des moteurs CF6 :

350 variables aléatoires

$> 10^{105}$ événements élémentaires !



Monitoring de patients :

37 variables aléatoires

$> 10^{16}$ événements élémentaires !

Liens entre gènes :

syndrome LQT – marqueur génétique

724 variables aléatoires

$> 10^{277}$ événements élémentaires !

Solution : décomposabilité + indépendance

1 Décomposabilité

- **Définition :** Probabilités conditionnelles : $P(A|B) = \dfrac{P(A,B)}{P(B)}$

$$\Longrightarrow P(A,B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$\Longrightarrow P(X_1,\ldots,X_n) = P(X_1)\prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1,\ldots,X_{i-1})$$

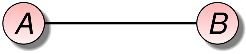
2 Indépendance

- **Définition :** Indépendance : $A \perp\!\!\!\perp B \Longrightarrow P(A|B) = P(A)$
- **Définition :** Indép. conditionnelle : $A \perp\!\!\!\perp B|C \Longrightarrow P(A|B,C) = P(A|C)$
- $\{L_i, K_i\}$ = partition de $\{X_1,\ldots,X_{i-1}\}$ t.q. $X_i \perp\!\!\!\perp L_i|K_i$

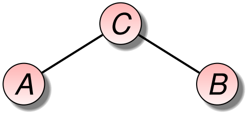
$$\Longrightarrow P(X_1,\ldots,X_n) = P(X_1)\prod_{i=1}^{n} P(X_i|K_i)$$

Vers un modèle graphique pour les probas (1/3)

A : pointure
B : lecture



A : pointure
B : lecture
C : âge

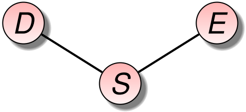


- ➥ A et B sont dépendants — non($A \perp\!\!\!\perp B$)
- ➥ sachant C, A et B sont indépendants — $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$

Vers un modèle graphique pour les probas (2/3)

D : premier dé
E : deuxième dé

D : premier dé
E : deuxième dé
S : $D + E$

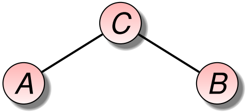


- ➥ D et E sont indépendants — $D \perp\!\!\!\perp E$
- ➥ sachant S, D et E sont dépendants — non$(D \perp\!\!\!\perp E \mid S)$

Vers un modèle graphique pour les probas (3/3)

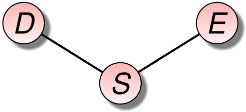
non($A \perp\!\!\!\perp B$)

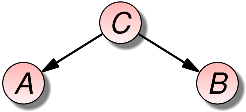
$A \perp\!\!\!\perp B \mid C$

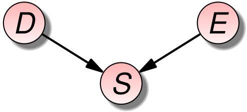


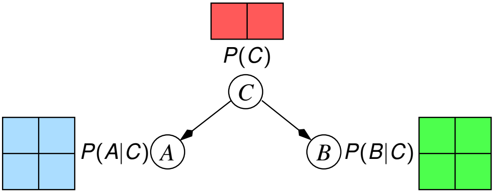
$D \perp\!\!\!\perp E$

non($D \perp\!\!\!\perp E \mid S$)





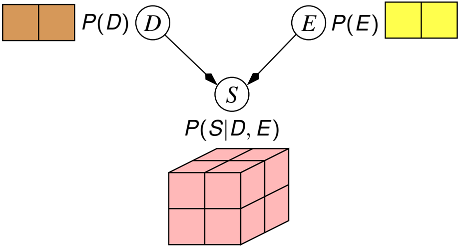




$A \perp\!\!\!\perp B | C$ $\qquad$ non$(A \perp\!\!\!\perp B)$

$$P(A, B, C) = P(C)P(A|C)P(B|C, A)$$

$$P(A, B, C) = P(C)P(A|C)P(B|C)$$



$D \perp\!\!\!\perp E$ $\qquad$ non$(D \perp\!\!\!\perp E | S)$

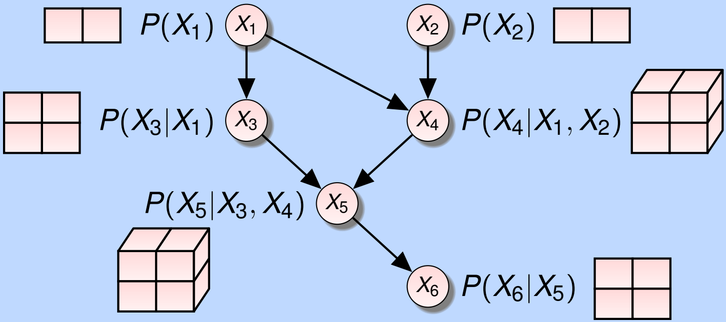
$$P(D, E, S) = P(D)P(E|D)P(S|D, E)$$

$$P(D, E, S) = P(D)P(E)P(S|D, E)$$

Réseaux bayésiens

Définition : réseau bayésien [Pearl (1988)]

1. un graphe orienté acyclique (DAG) :



distribution jointe : $P(X_1, \ldots, X_6) = \prod_{i=1}^{6} P(X_i|\mathbf{Pa}(X_i))$

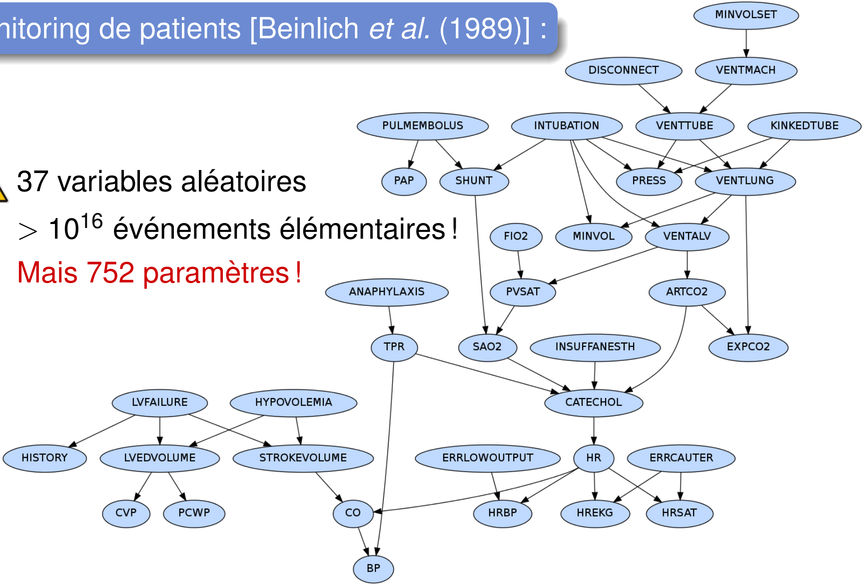
2. À chaque X_i est associé sa table $P(X_i|\mathbf{Pa}(X_i))$

Monitoring de patients [Beinlich *et al.* (1989)] :

37 variables aléatoires

$> 10^{16}$ événements élémentaires !

Mais 752 paramètres !



Bibliographie

- Bayes, T., Price, R. (1763) « An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances », Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 53 :370–418
- Beinlich I., Suermondt H.J., Chavez R.M. et Cooper G.F. (1989) « The ALARM Monitoring System : A Case Study with Two Probabilistic Inference Techniques for Belief Networks », Proceedings of the 2nd European Conference on Artificial Intelligence in Medicine, 247–256
- Kolmogorov, A. (1933) Foundations of the theory of probability. Chelsea Publishing Company.
- Pearl, J. (1988) Probabilistic reasoning in intelligent systems. Morgan Kaufmann