cours 1
Introduction raisonnable

Aix-Marseille université — Initiative d'excellence

Master SID — Raisonnement dans l'incertain

Généralités sur le module

Objectif principal

Proposer quelques clefs pour raisonner dans l'incertain.

Généralités sur le module

Objectif principal

Proposer quelques clefs pour raisonner dans l'incertain.

Compétences attendues

- Savoir manipuler les modèles vus en cours
- Connaître les limites de ces modèles

Généralités sur le module

Objectif principal

Proposer quelques clefs pour raisonner dans l'incertain.

Compétences attendues

- Savoir manipuler les modèles vus en cours
- Connaître les limites de ces modèles

Déroulement du module

- 8 mini cours théoriques
- 7 TD
- 3 TP (en python/pyAgrum)

Généralités sur le module

Objectif principal

Proposer quelques clefs pour raisonner dans l'incertain.

Compétences attendues

- Savoir manipuler les modèles vus en cours
- Connaître les limites de ces modèles

Déroulement du module

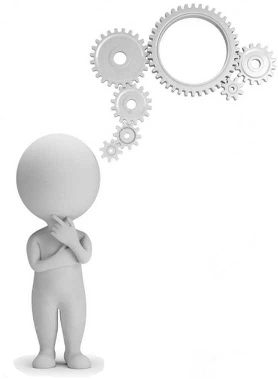
- 8 mini cours théoriques
- 7 TD
- 3 TP (en python/pyAgrum)

- Site du module : `https://pageperso.lis-lab.fr/christophe.gonzales/teaching/incertain`

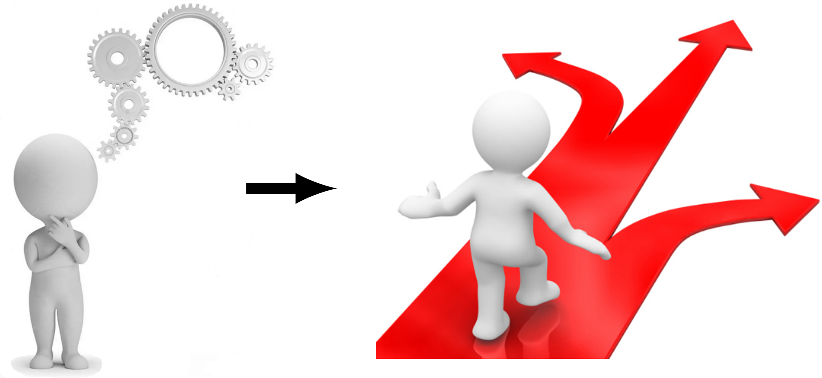
Évaluation

- Contrôle continu :
  - 7 mini-interros dont seules les 6 meilleures comptent
  - 1 TP noté
- Note finale = 60% examen + 20% mini-interros + 20% TP
- Seul document autorisé à l'examen :
  une feuille A4 recto-verso

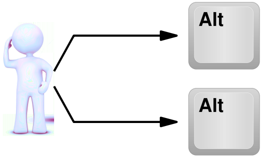
Pourquoi raisonner dans l'incertain ?



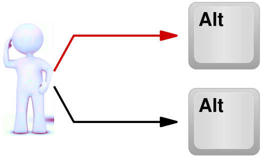
Pourquoi raisonner dans l’incertain ?

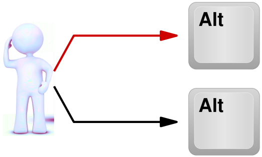


Prise de décision



Prise de décision

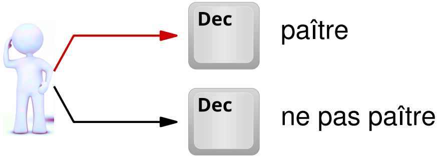




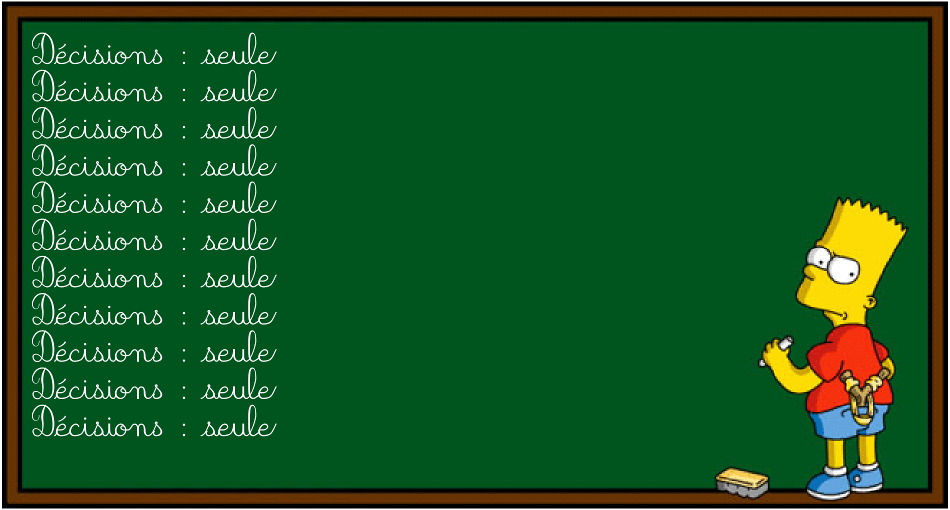
paître

ne pas paître

Prise de décision

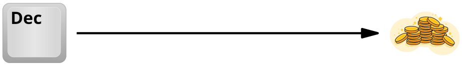


Savage (1954)

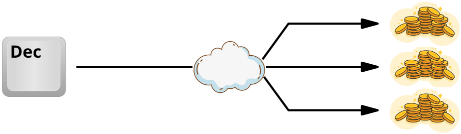

Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule

Représentation de décisions

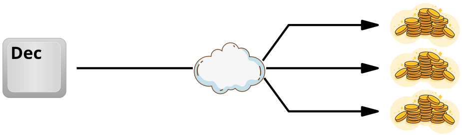
Représentation selon Savage :



Représentation selon Savage :



Représentation selon Savage :

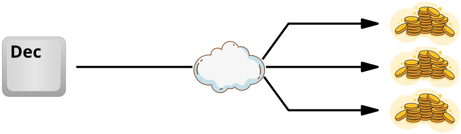


Décision $\Longleftrightarrow$ acte *[Savage (1954)]*

- Acte : fonction des événements possibles vers les conséquences de la décision

- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow acte(d_1) \succsim_{\mathcal{A}} acte(d_2)$

Représentation selon Savage :

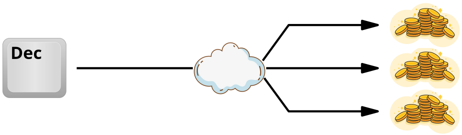


Décision $\Longleftrightarrow$ acte *[Savage (1954)]*

- Acte : fonction des événements possibles vers les conséquences de la décision
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences possibles
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature (événements élémentaires)

- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow acte(d_1) \succsim_{\mathcal{A}} acte(d_2)$

Représentation selon Savage :

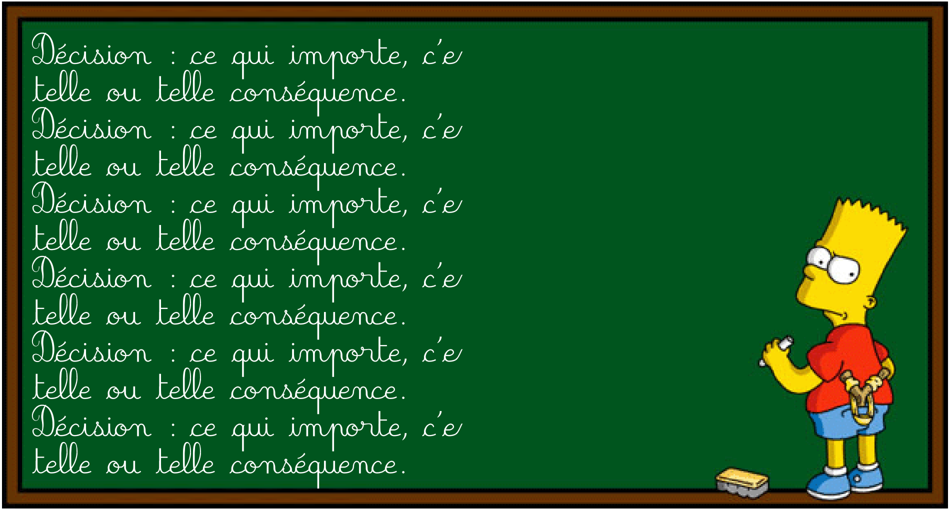


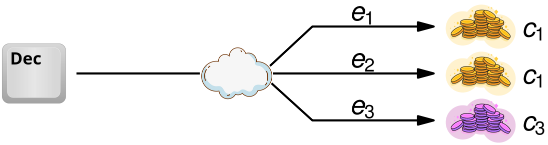
Décision $\Longleftrightarrow$ *acte* *[Savage (1954)]*

- Acte : fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences possibles
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature (événements élémentaires)

- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow acte(d_1) \succsim_{\mathcal{A}} acte(d_2)$

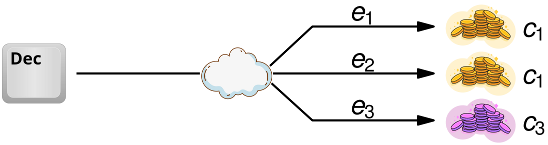
von Neumann-Morgenstern (1944)




Dec
e_1
e_2
e_3
c_1
c_1
c_3

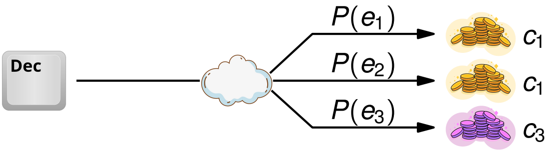
von Neumann-Morgenstern (1944)

Ce qui importe, c'est uniquement la chance (**probabilité**) d'obtenir telle ou telle conséquence.



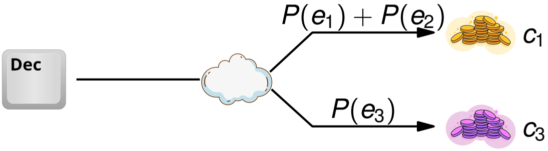
von Neumann-Morgenstern (1944)

Ce qui importe, c'est uniquement la chance (**probabilité**) d'obtenir telle ou telle conséquence.



von Neumann-Morgenstern (1944)

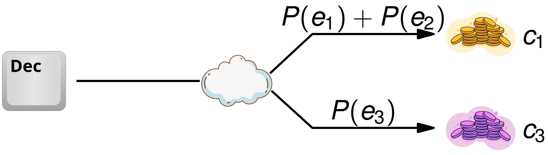
Ce qui importe, c'est uniquement la chance (**probabilité**) d'obtenir telle ou telle conséquence.



Loteries : des actes simplifiés

von Neumann-Morgenstern (1944)

Ce qui importe, c'est uniquement la chance (**probabilité**) d'obtenir telle ou telle conséquence.



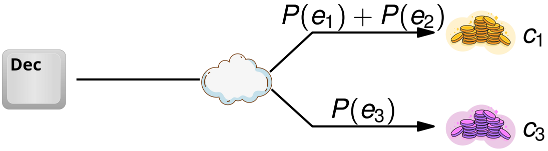
Loterie

- Loterie : $\langle (x_1, p_1), \ldots, (x_n, p_n) \rangle$
  ensemble de couples (conséquence, proba de la conséquence)
- $\mathcal{L}$: ensemble des loteries

Loteries : des actes simplifiés

von Neumann-Morgenstern (1944)

Ce qui importe, c'est uniquement la chance (**probabilité**) d'obtenir telle ou telle conséquence.

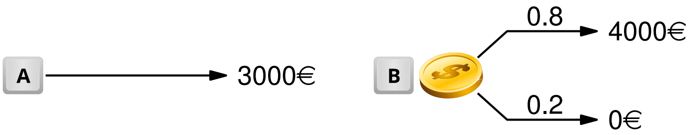


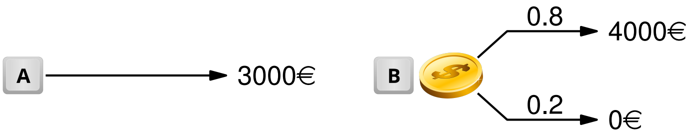
Loterie

- Loterie : $\langle (x_1, p_1), \ldots, (x_n, p_n) \rangle$
  ensemble de couples (conséquence, proba de la conséquence)
- $\mathcal{L}$: ensemble des loteries

- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \iff \mathit{loterie}(d_1) \succsim_{\mathcal{L}} \mathit{loterie}(d_2)$

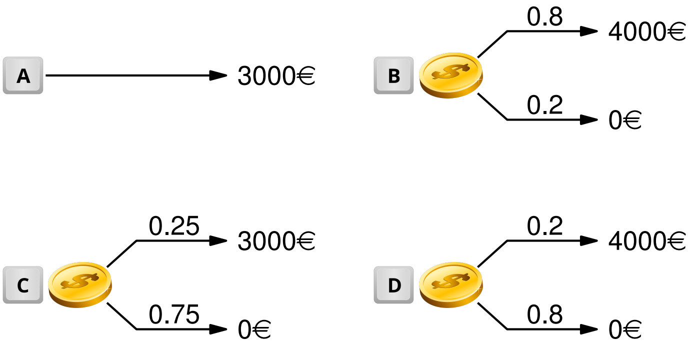
Exemple de prise de décision



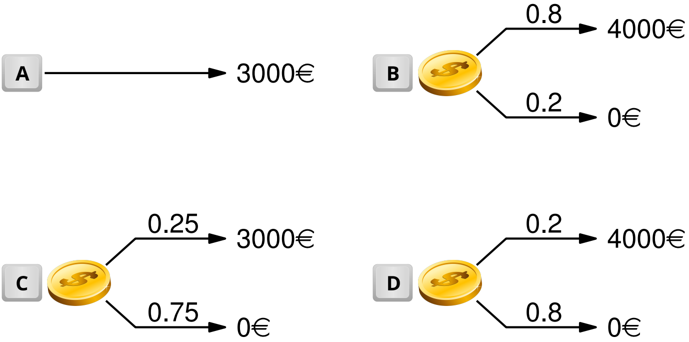


$A \succ_{\mathcal{D}} B$

Exemple de prise de décision



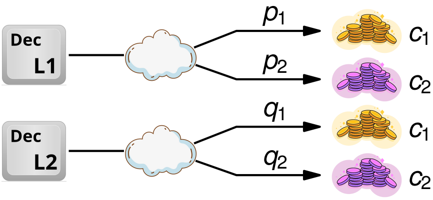
$A \succ_{\mathcal{D}} B$



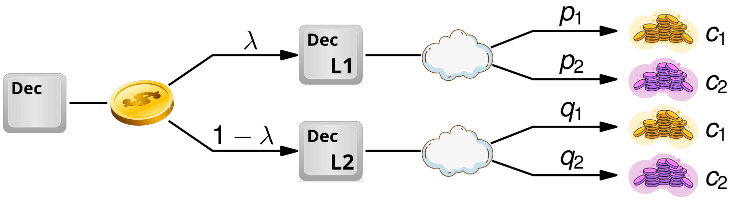
$A \succ_{\mathcal{D}} B$

$D \succ_{\mathcal{D}} C$

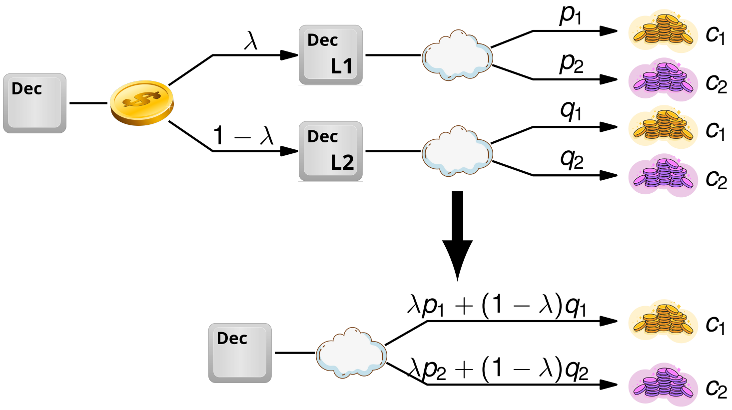
Mixture de loteries

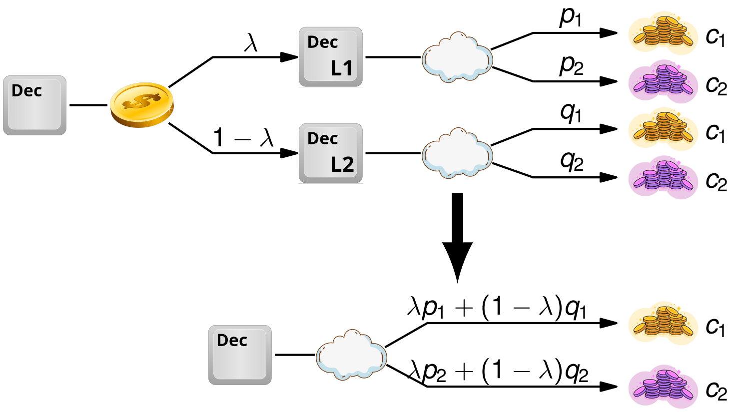


Mixture de loteries



Mixture de loteries





Mixture de loteries

- loterie(Dec) $=$ Mixture de L_1 et $L_2 = \lambda L_1 + (1-\lambda) L_2$

1er modèle décisionnel : von Neumann-Morgenstern

Axiome 1 : préordre large total

$\succsim_{\mathcal{L}}$: est un préordre large total non-trivial sur les loteries $\mathcal{L}$

1er modèle décisionnel : von Neumann-Morgenstern

Axiome 1 : préordre large total

$\succsim_{\mathcal{L}}$: est un préordre large total non-trivial sur les loteries $\mathcal{L}$

Axiome 2 : continuité

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$ t.q. $P \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} R$, il existe $\alpha, \beta \in]0,1[$ t.q. :

$$\alpha P + (1-\alpha) R \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} \beta P + (1-\beta) R.$$

1er modèle décisionnel : von Neumann-Morgenstern

Axiome 1 : préordre large total

$\succsim_{\mathcal{L}}$: est un préordre large total non-trivial sur les loteries $\mathcal{L}$

Axiome 2 : continuité

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$ t.q. $P \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} R$, il existe $\alpha, \beta \in]0, 1[$ t.q. :

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} \beta P + (1 - \beta)R.$$

Axiome 3 : indépendance

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in]0, 1]$:

$$P \succsim_{\mathcal{L}} Q \Longleftrightarrow \alpha P + (1 - \alpha)R \succsim_{\mathcal{L}} \alpha Q + (1 - \alpha)R.$$

1er modèle décisionnel : von Neumann-Morgenstern

Axiome 1 : préordre large total

$\succsim_{\mathcal{L}}$: est un préordre large total non-trivial sur les loteries $\mathcal{L}$

Axiome 2 : continuité

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$ t.q. $P \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} R$, il existe $\alpha, \beta \in]0, 1[$ t.q. :

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} \beta P + (1 - \beta)R.$$

Axiome 3 : indépendance

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in]0, 1]$:

$$P \succsim_{\mathcal{L}} Q \Longleftrightarrow \alpha P + (1 - \alpha)R \succsim_{\mathcal{L}} \alpha Q + (1 - \alpha)R.$$

Théorème *[von Neumann-Morgenstern (1944)]*

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\succsim_{\mathcal{L}}$ vérifie les axiomes 1,2,3.
2. $\succsim_{\mathcal{L}}$ est représentable par une fonction U t.q. $U(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$ où $u : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ t.q. $u(x_i) = U(\langle x_i, 1\rangle)$.

Du loto à la loterie

- 1 ticket de loto coûte 2 €
- $\mathcal{X} = \begin{cases} A : \text{gagner } 10\,€ & P(A) = 1/50 \\ B : \text{gagner 1 million } € & P(B) = 1/2000000 \\ C : \text{ne rien gagner} & P(C) = 1 - P(A) - P(B) \end{cases}$

Du loto à la loterie

- 1 ticket de loto coûte 2 €
- $\mathcal{X} = \begin{cases} A : \text{gagner } 10\,€ & P(A) = 1/50 \\ B : \text{gagner 1 million } € & P(B) = 1/2000000 \\ C : \text{ne rien gagner} & P(C) = 1 - P(A) - P(B) \end{cases}$

Question : doit-on acheter un ticket (décision D_1) ou non (D_2) ?

Du loto à la loterie

- 1 ticket de loto coûte 2 €
- $\mathcal{X} = \begin{cases} A : \text{gagner } 10\,€ & P(A) = 1/50 \\ B : \text{gagner } 1 \text{ million } € & P(B) = 1/2000000 \\ C : \text{ne rien gagner} & P(C) = 1 - P(A) - P(B) \end{cases}$

Question : doit-on acheter un ticket (décision D_1) ou non (D_2) ?

- $U(D_1) = P(A) \times u((10 - 2)\,€) + P(B) \times u((10^6 - 2)\,€) + P(C) \times u(-2\,€)$
- $U(D_2) = u(0\,€)$

Du loto à la loterie

- 1 ticket de loto coûte 2 €
- $\mathcal{X} = \begin{cases} A : \text{gagner } 10\,€ & P(A) = 1/50 \\ B : \text{gagner 1 million } € & P(B) = 1/2000000 \\ C : \text{ne rien gagner} & P(C) = 1 - P(A) - P(B) \end{cases}$

Question : doit-on acheter un ticket (décision D_1) ou non (D_2) ?

- $U(D_1) = P(A) \times u((10-2)\,€) + P(B) \times u((10^6-2)\,€) + P(C) \times u(-2\,€)$
- $U(D_2) = u(0\,€)$

Réponse :

- Si $u(x) = x$: $U(d_1) = -1,3$ et $U(D_2) = 0 \Longrightarrow$ ne pas acheter le ticket

Du loto à la loterie

- 1 ticket de loto coûte 2 €
- $\mathcal{X} = \begin{cases} A : \text{gagner } 10\,€ & P(A) = 1/50 \\ B : \text{gagner 1 million } € & P(B) = 1/2000000 \\ C : \text{ne rien gagner} & P(C) = 1 - P(A) - P(B) \end{cases}$

Question : doit-on acheter un ticket (décision D_1) ou non (D_2) ?

- $U(D_1) = P(A) \times u((10-2)\,€) + P(B) \times u((10^6-2)\,€) + P(C) \times u(-2\,€)$
- $U(D_2) = u(0\,€)$

Réponse :

- Si $u(x) = x$: $U(d_1) = -1,3$ et $U(D_2) = 0 \Longrightarrow$ ne pas acheter le ticket
- Si $u(x) = x^2$: $U(d_1) = 500003,2$ et $U(D_2) = 0 \Longrightarrow$ acheter le ticket

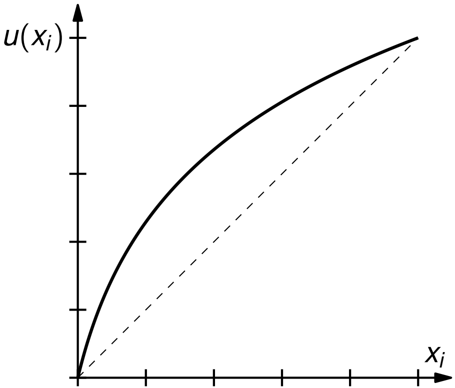
$u(x)$: utilité de Von Neumann-Morgenstern

$u(x_i)$: satisfaction d'obtenir la conséquence x_i

$\Longrightarrow$ représente les préférences de l'agent

$u(x_i)$: satisfaction d'obtenir la conséquence x_i

$\Longrightarrow$ représente les préférences de l'agent



De vNM à la conduite sportive

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »

⚠ Rappel : pas de notion de probabilité dans les actes

2ème modèle décisionnel : Savage

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »
- Si P1 à P7 vérifiées :
  - l'agent modélise les incertitudes par des probabilités.

⚠ Rappel : pas de notion de probabilité dans les actes

2ème modèle décisionnel : Savage

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »
- Si P1 à P7 vérifiées :
  - l'agent modélise les incertitudes par des probabilités.
  - l'agent a des préférences $\succsim_{\mathcal{A}}$ sur les actes

Rappel : pas de notion de probabilité dans les actes

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »
- Si P1 à P7 vérifiées :
  - l'agent modélise les incertitudes par des probabilités.
  - l'agent a des préférences $\succsim_{\mathcal{A}}$ sur les actes représentables par un modèle d'espérance d'utilité (EU) :

$$f \succsim_{\mathcal{A}} g \Longleftrightarrow U(f) \geq U(g)$$
$$U(f) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s)u(f(s))$$

⚠ Rappel : pas de notion de probabilité dans les actes

2ème modèle décisionnel : Savage

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »
- Si P1 à P7 vérifiées :
  - l'agent modélise les incertitudes par des probabilités.
  - l'agent a des préférences $\succsim_{\mathcal{A}}$ sur les actes représentables par un modèle d'espérance d'utilité (EU) :

$$f \succsim_{\mathcal{A}} g \Longleftrightarrow U(f) \geq U(g)$$
$$U(f) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) u(f(s))$$

- Probabilités $\Longrightarrow$ subjectives !

⚠ Rappel : pas de notion de probabilité dans les actes

Limites de EU

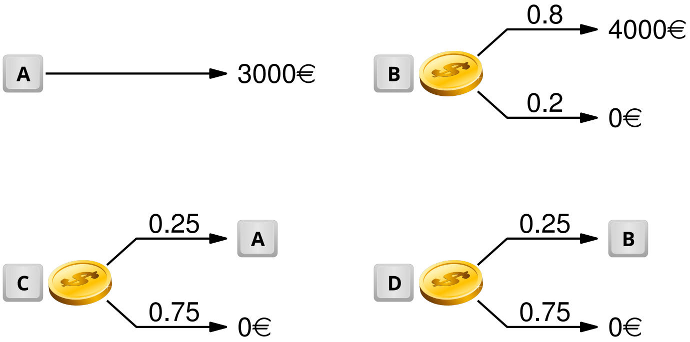
- Kahneman & Tversky :

A $\longrightarrow$ 3000€

B  0.8 $\longrightarrow$ 4000€ ; 0.2 $\longrightarrow$ 0€

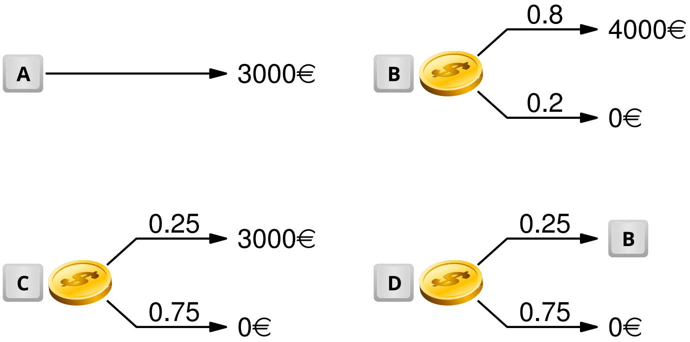
$A \succ_{\mathcal{L}} B$

- Kahneman & Tversky :



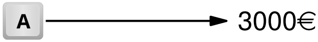
$A \succ_{\mathcal{L}} B$

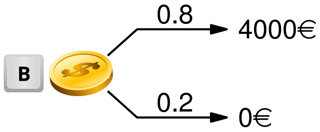
- Kahneman & Tversky :



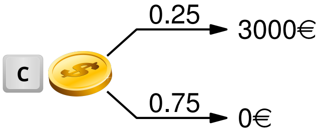
$A \succ_{\mathcal{L}} B$

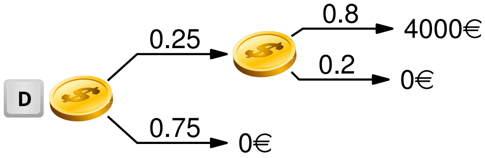
- Kahneman & Tversky :



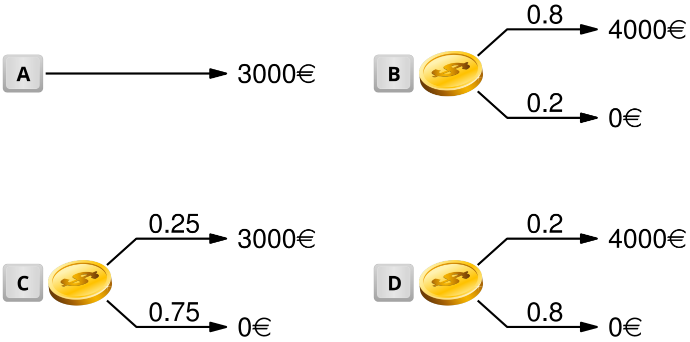


$A \succ_{\mathcal{L}} B$





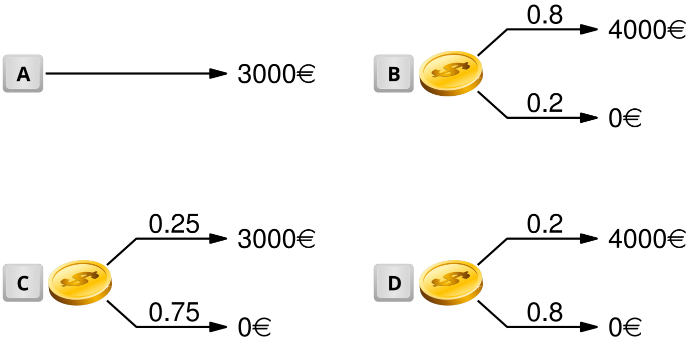
- Kahneman & Tversky :



$A \succ_{\mathcal{L}} B$

Limites de EU

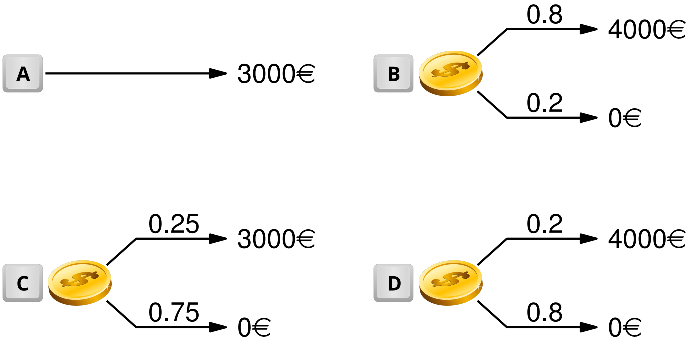
- Kahneman & Tversky :



$A \succ_{\mathcal{L}} B$

$D \succ_{\mathcal{L}} C$

- Kahneman & Tversky :



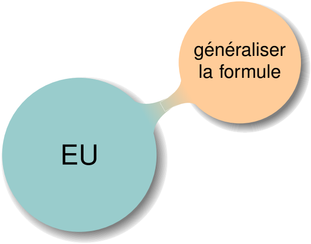
$A \succ_{\mathcal{L}} B$

$D \succ_{\mathcal{L}} C$

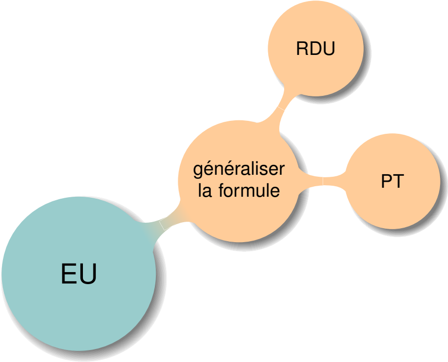
$\Longrightarrow$ Violation de l'axiome d'indépendance

Peut-on aller au delà de EU ?

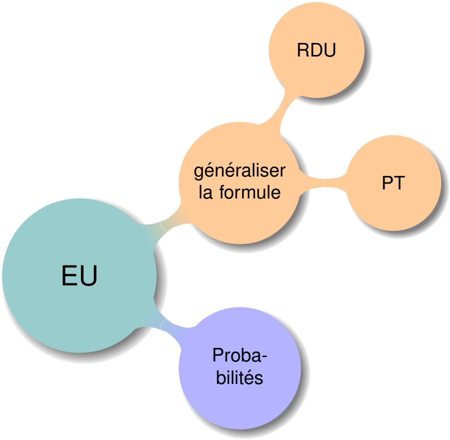
Peut-on aller au delà de EU ?

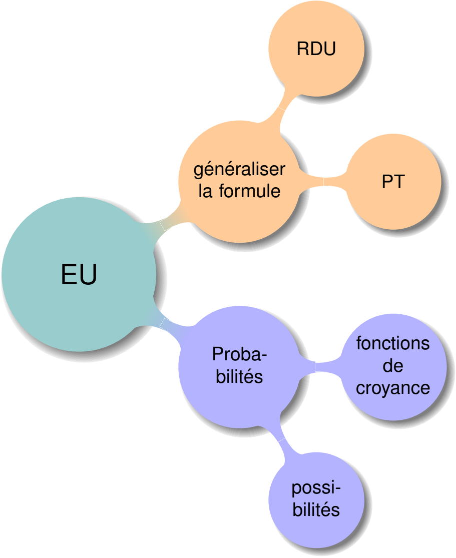


Peut-on aller au delà de EU ?

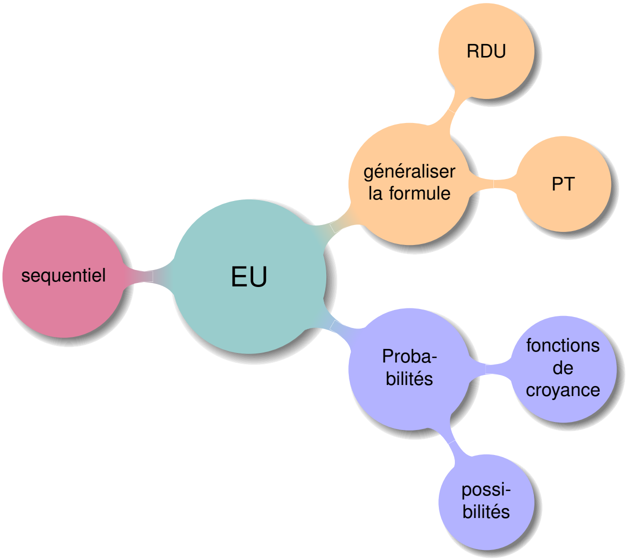


Peut-on aller au delà de EU ?

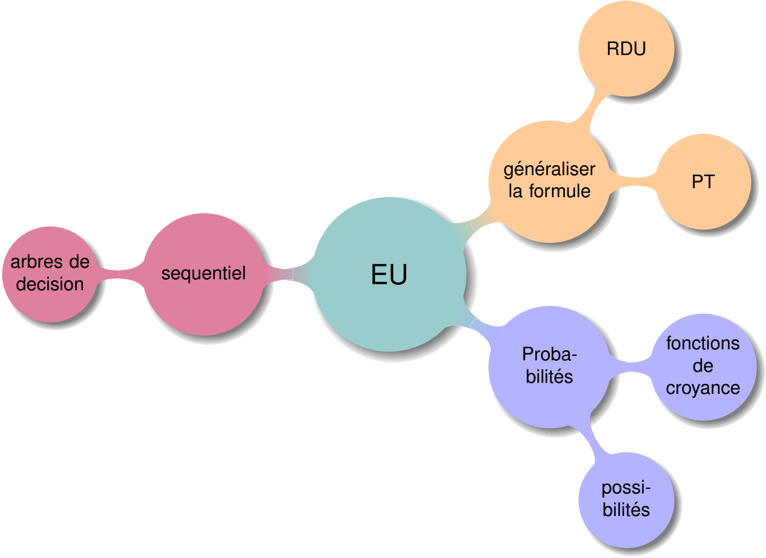



EU
généraliser la formule
RDU
PT
Proba-bilités
fonctions de croyance
possi-bilités

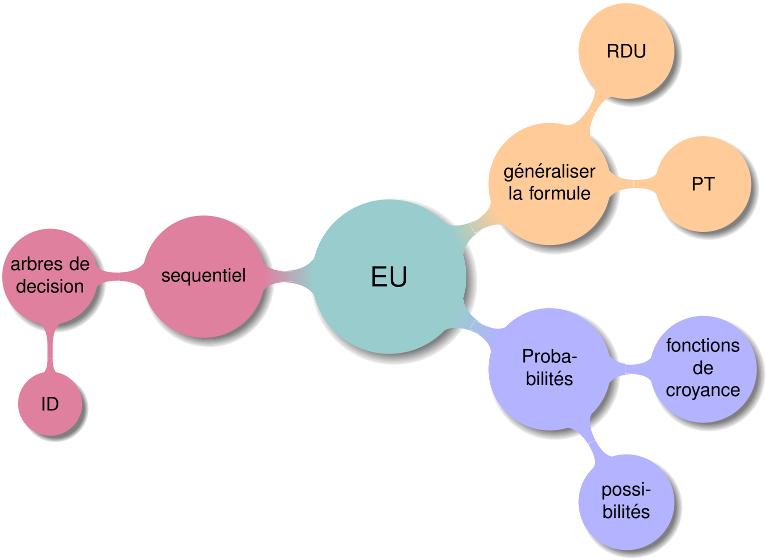
Peut-on aller au delà de EU ?



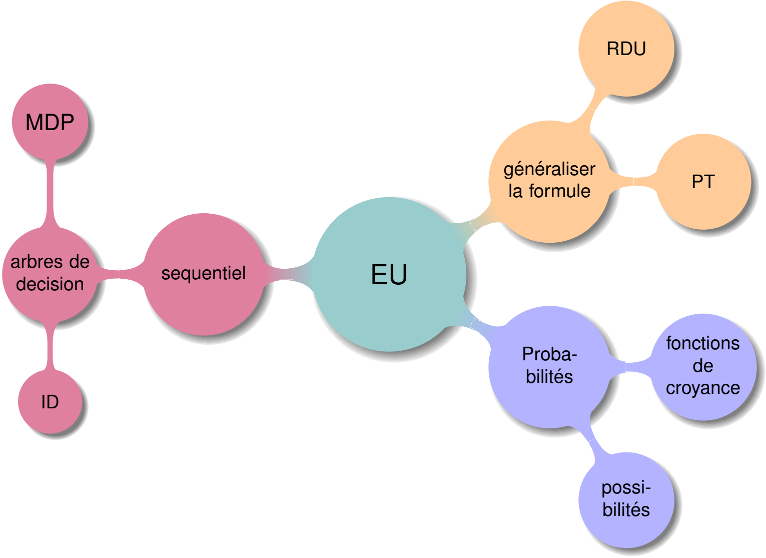
Peut-on aller au delà de EU ?



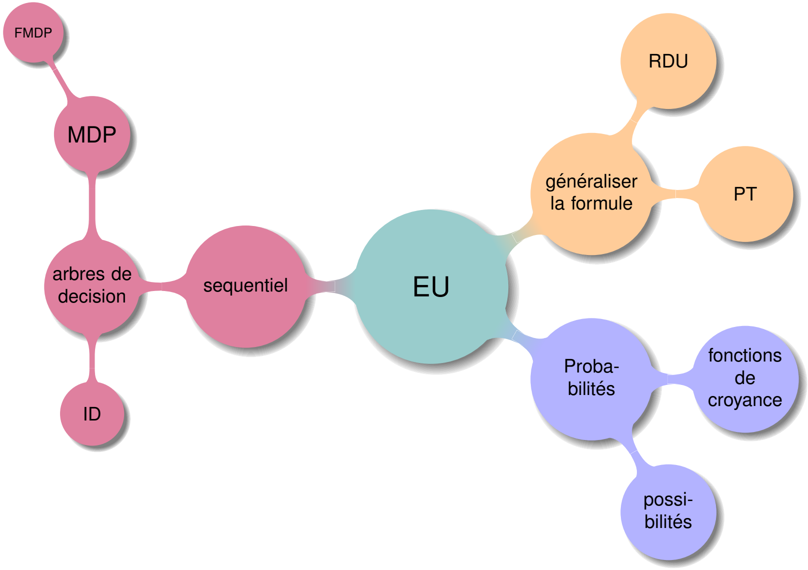
Peut-on aller au delà de EU ?



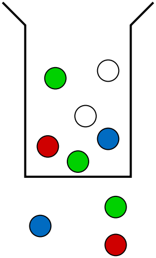
Peut-on aller au delà de EU ?



Peut-on aller au delà de EU ?

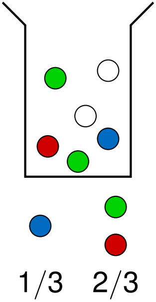


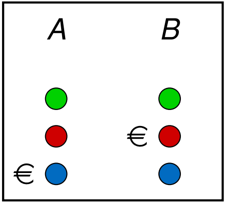
L'urne d'Ellsberg (1961)



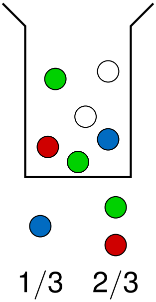
$1/3 \quad 2/3$

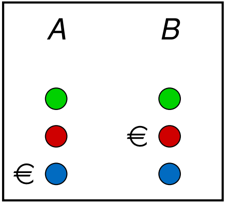
L'urne d'Ellsberg (1961)





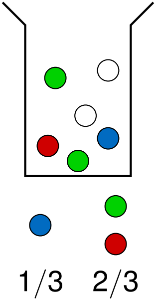
L'urne d'Ellsberg (1961)

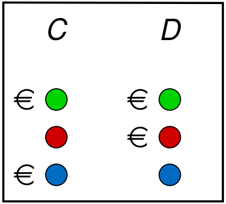


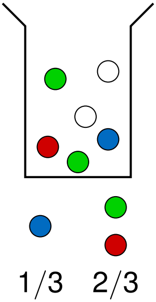


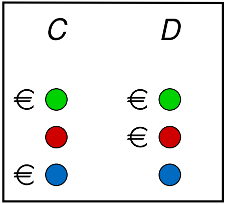
$A \succ B$

L'urne d'Ellsberg (1961)

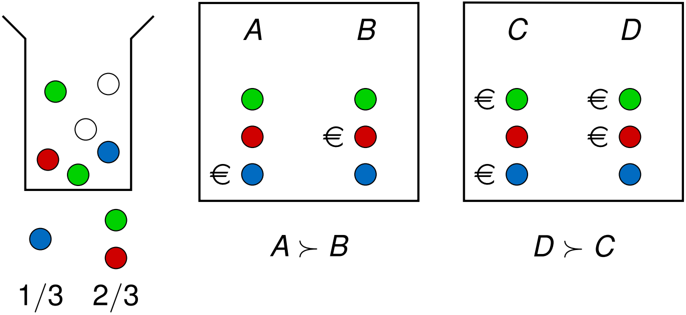


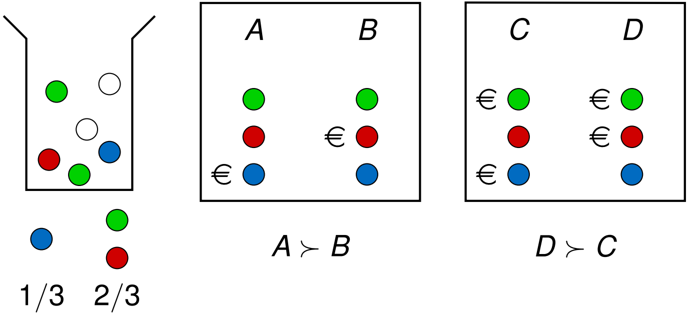




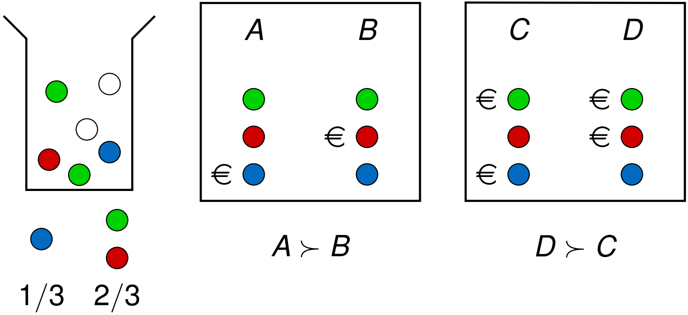


$$D \succ C$$


1/3 2/3
A B
€
€
A ≻ B
C D
€ €
€
€
D ≻ C

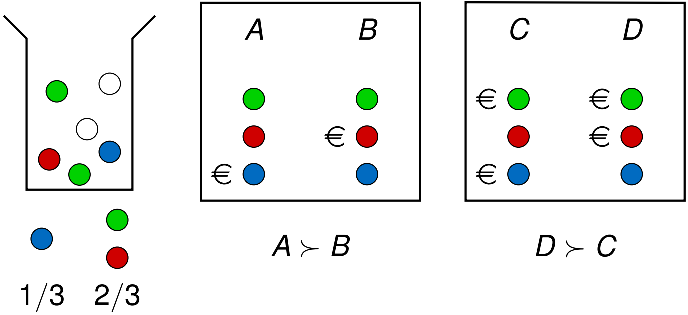


$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle / axiome d'indépendance



$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle / axiome d'indépendance

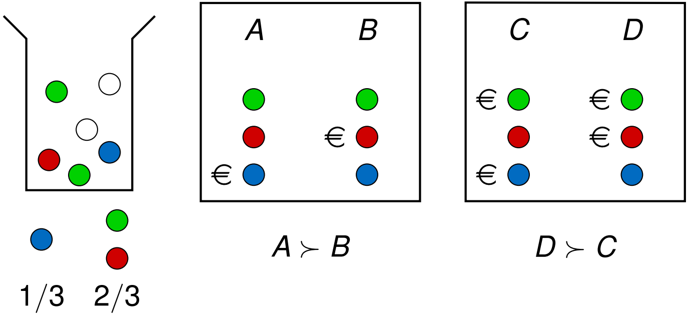
$\Longrightarrow$ pas représentable par des probabilités



$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle / axiome d'indépendance

$\Longrightarrow$ pas représentable par des probabilités

⚠ représentable par des fonctions de croyance !



$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle / axiome d'indépendance

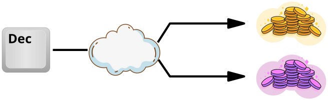
$\Longrightarrow$ pas représentable par des probabilités

⚠ représentable par des fonctions de croyance !

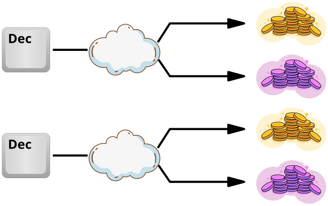
$\Longrightarrow$ Il existe différentes rationalités

Dépendent des informations disponibles (imprécises, floues, incomplètes, etc.)

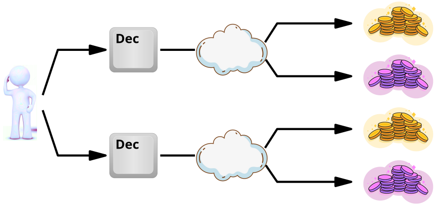
Des loteries aux arbres de décision



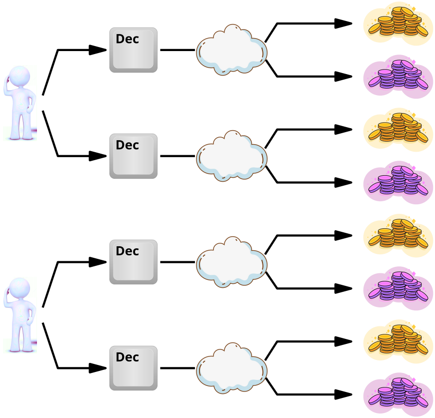
Des loteries aux arbres de décision



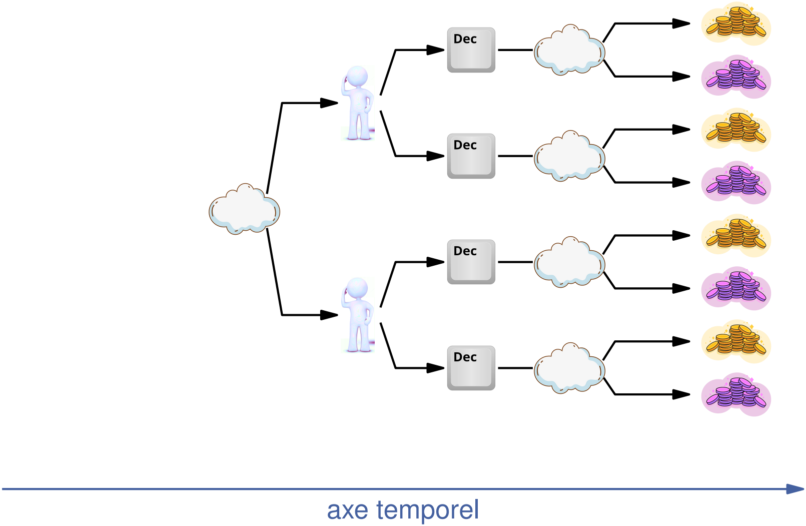
Des loteries aux arbres de décision



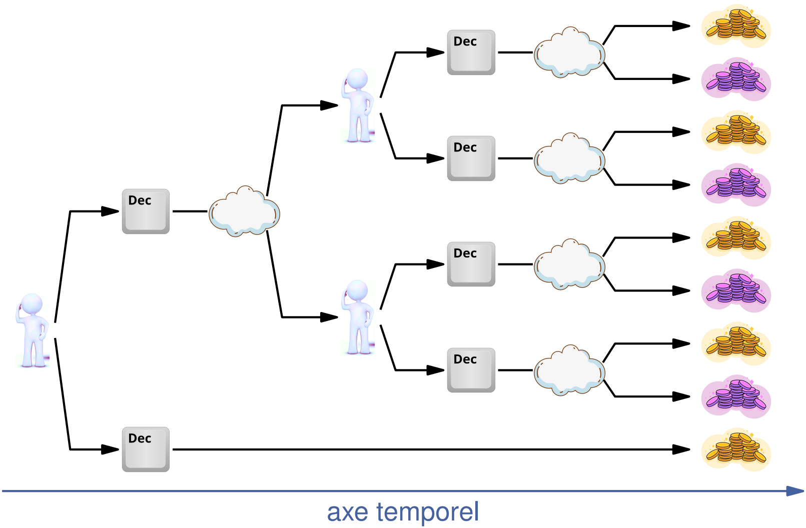
Des loteries aux arbres de décision



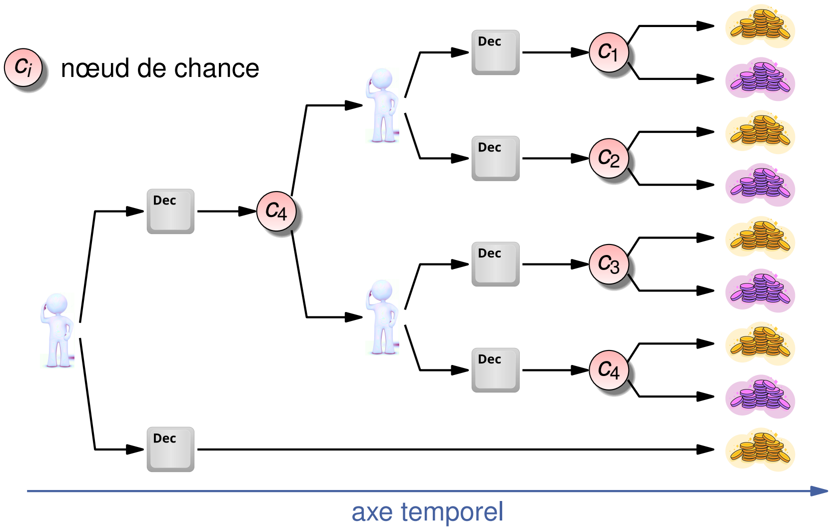
Des loteries aux arbres de décision



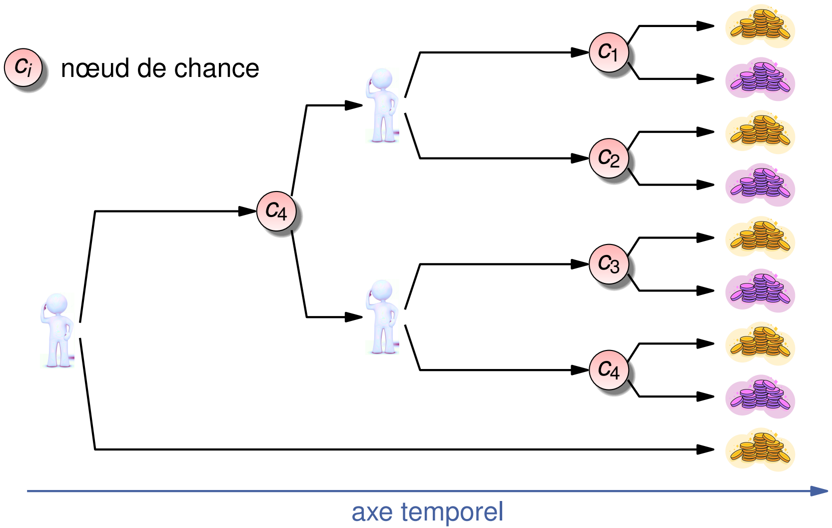
Des loteries aux arbres de décision



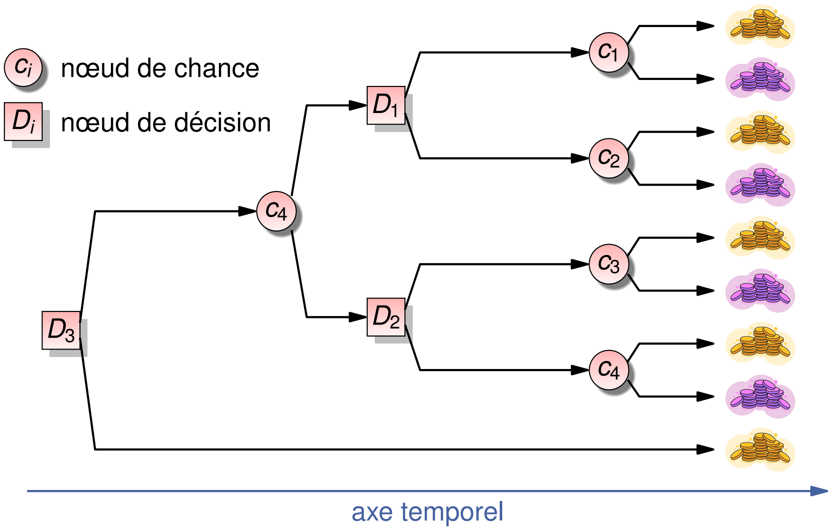
Des loteries aux arbres de décision

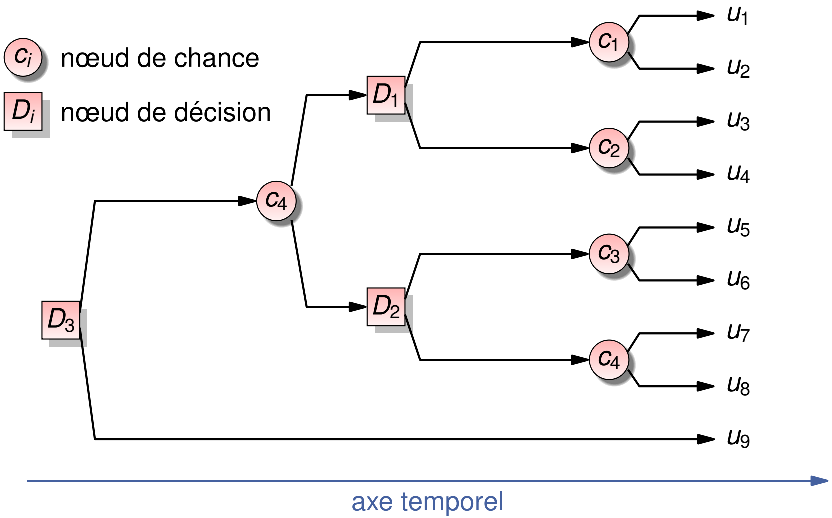


Des loteries aux arbres de décision

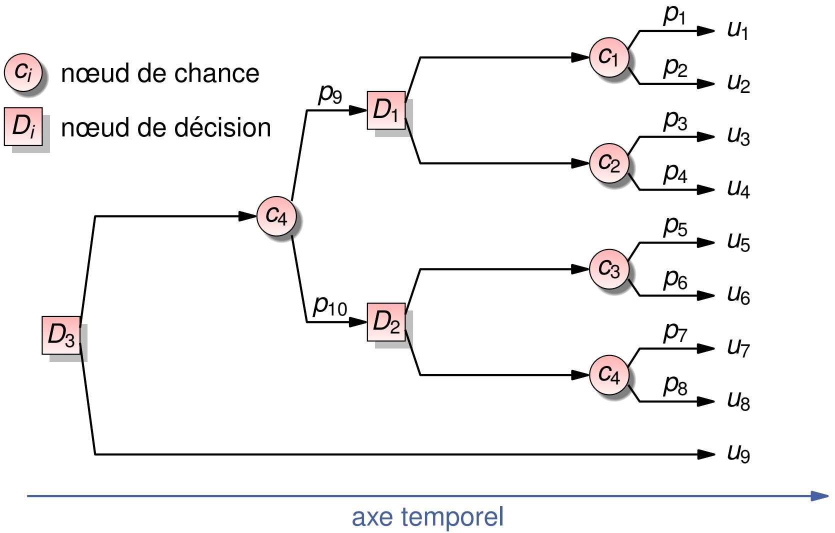


Des loteries aux arbres de décision

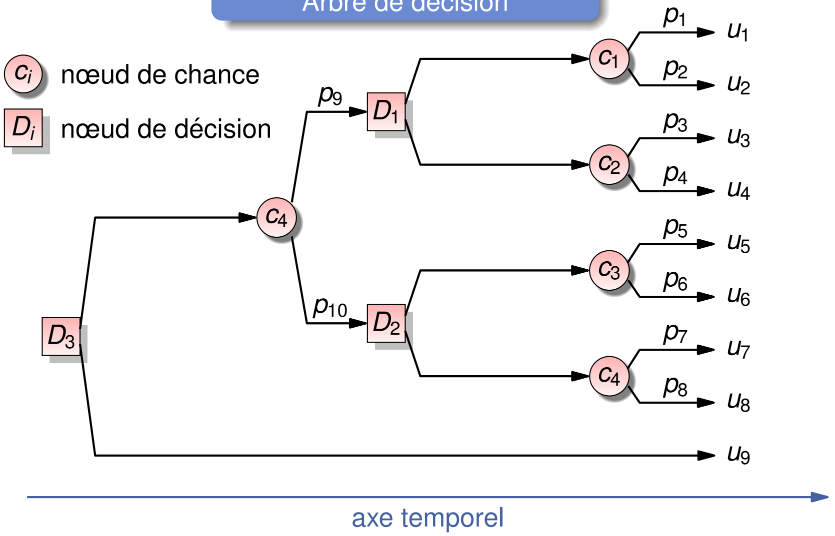



c_i nœud de chance
D_i nœud de décision
D_3
c_4
D_1
D_2
c_1
c_2
c_3
c_4
u_1
u_2
u_3
u_4
u_5
u_6
u_7
u_8
u_9
axe temporel

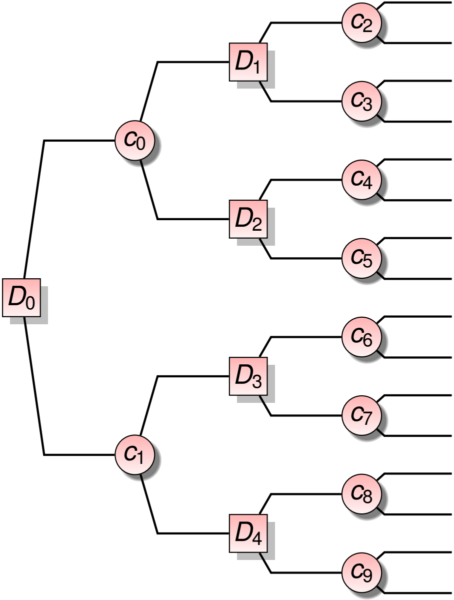
Des loteries aux arbres de décision



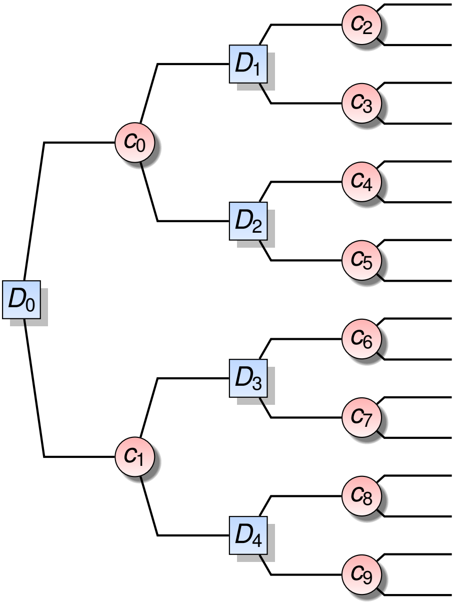
Arbre de décision



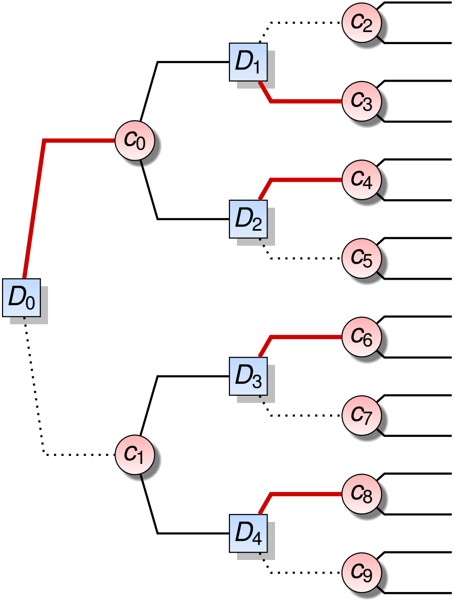
Décisions optimales dans un arbre de décision



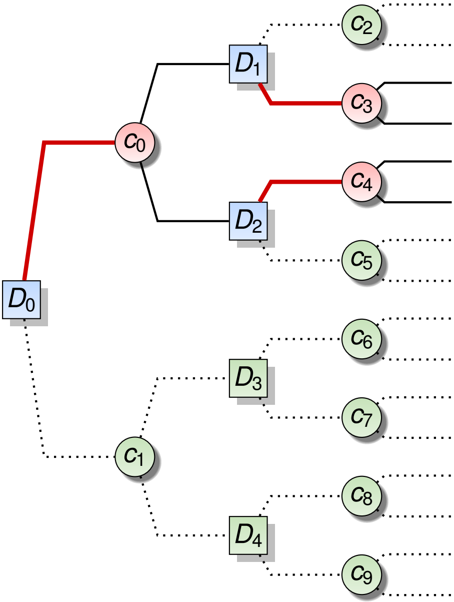
Décisions optimales dans un arbre de décision



Décisions optimales dans un arbre de décision



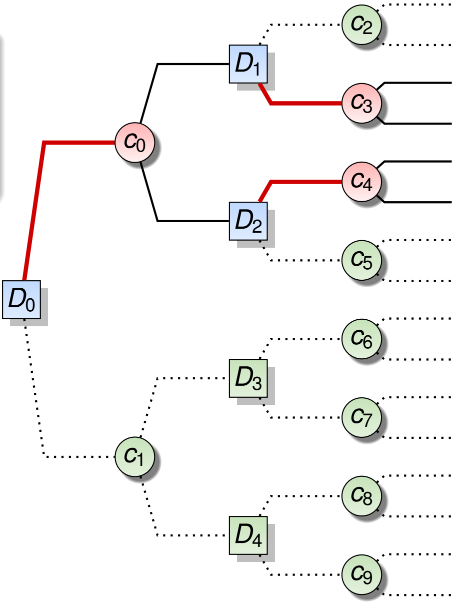
Décisions optimales dans un arbre de décision



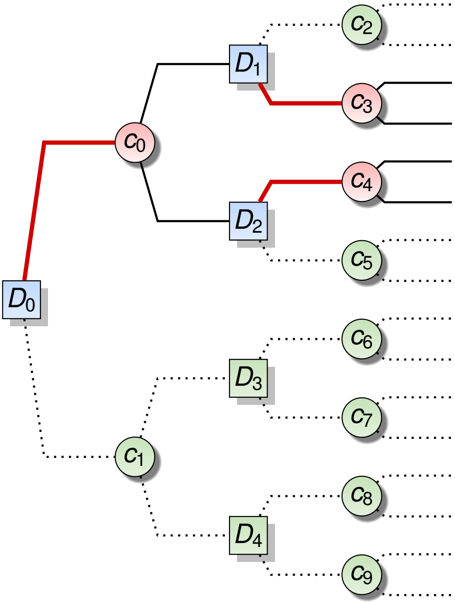
Décisions optimales dans un arbre de décision

Stratégie

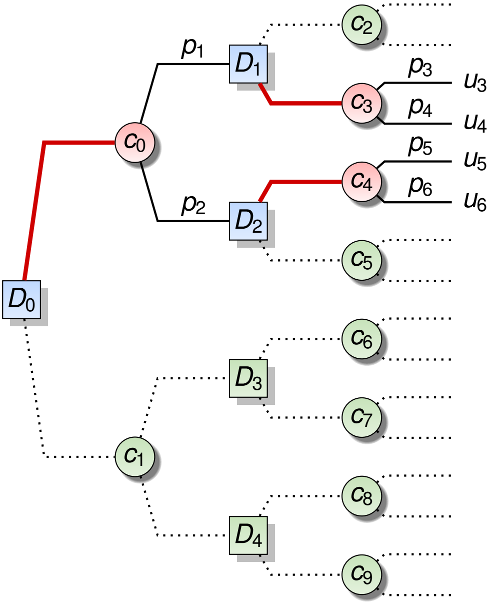
Choisir une branche (rouge) pour tout nœud de décision D_i accessible (bleu).



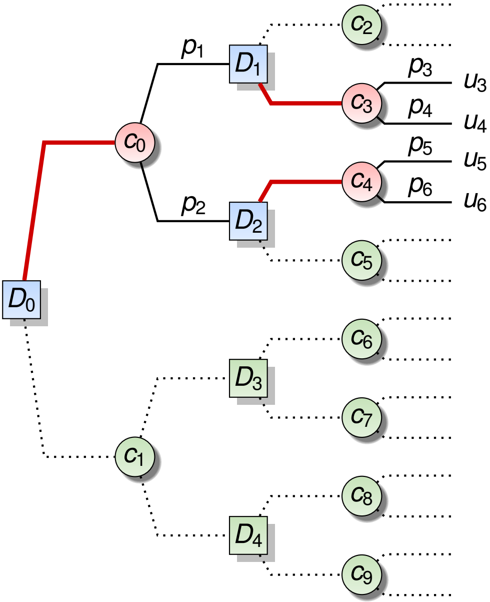
Décisions optimales dans un arbre de décision

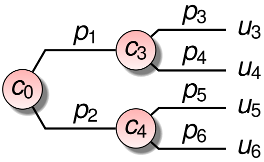


Décisions optimales dans un arbre de décision



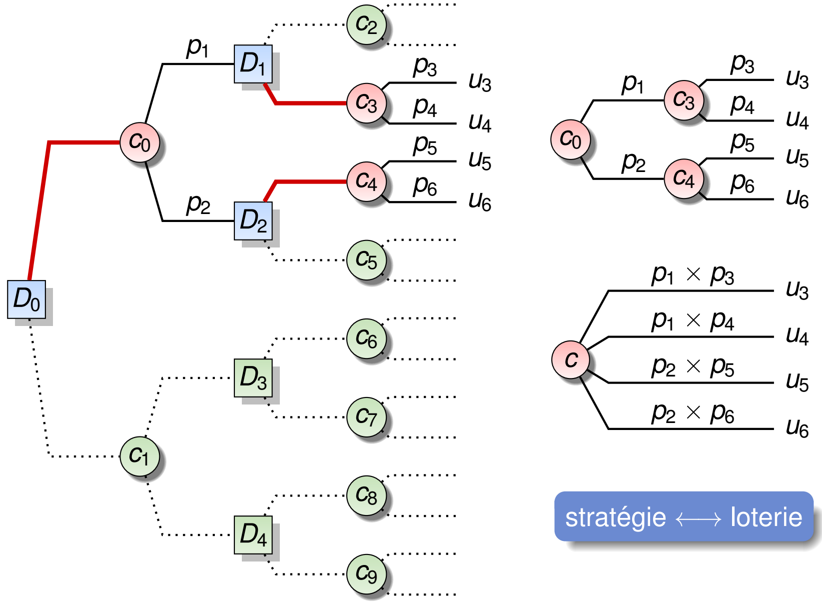
Décisions optimales dans un arbre de décision





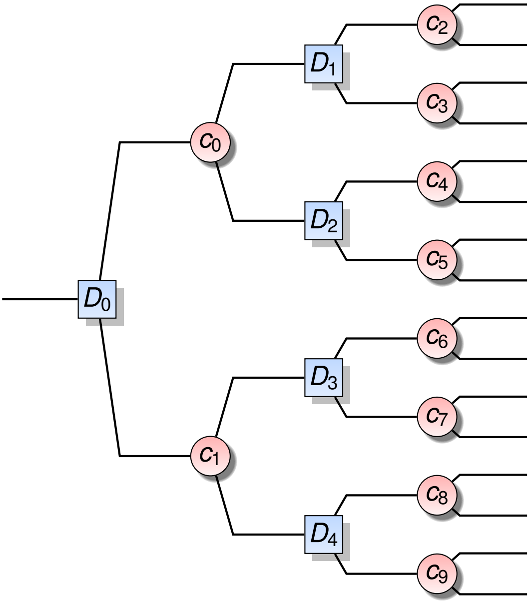
stratégie $\longleftrightarrow$ loterie

Décisions optimales dans un arbre de décision

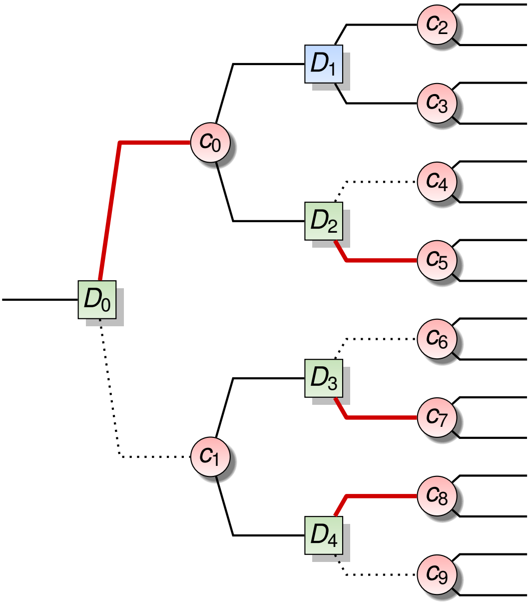


stratégie $\longleftrightarrow$ loterie

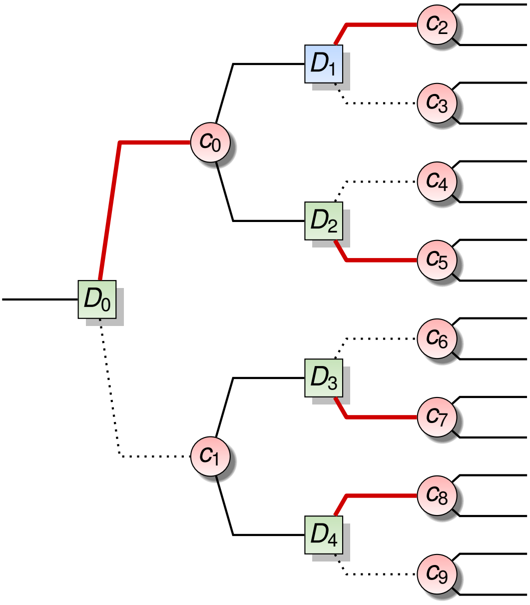
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



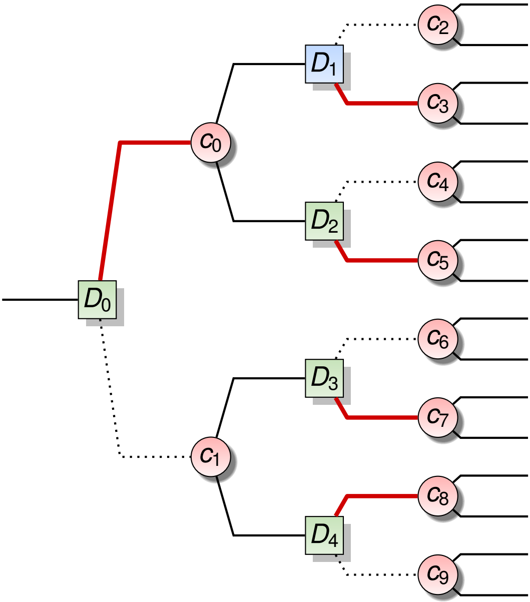
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



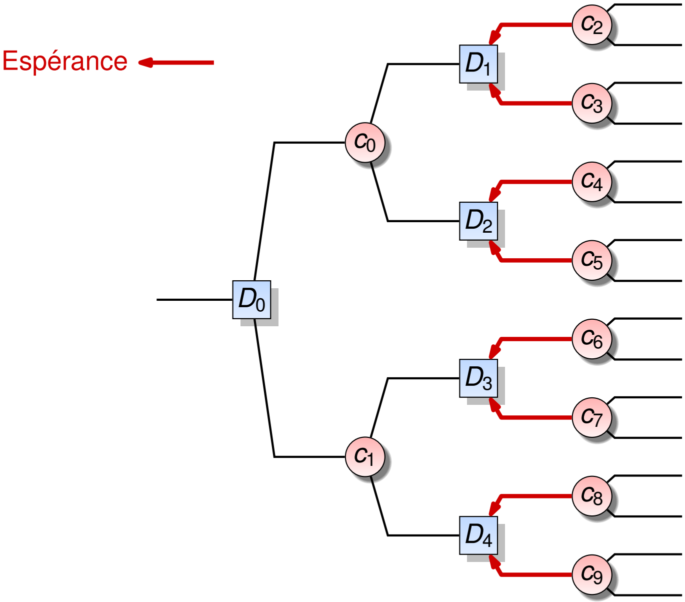
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



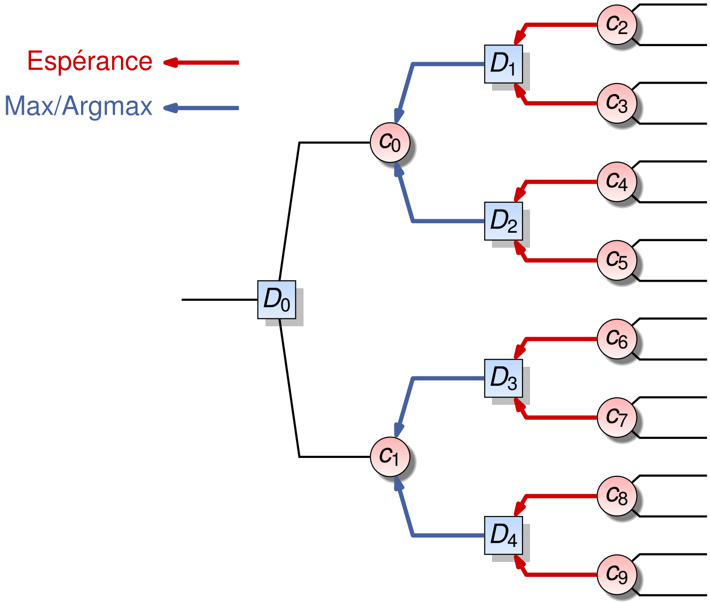
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



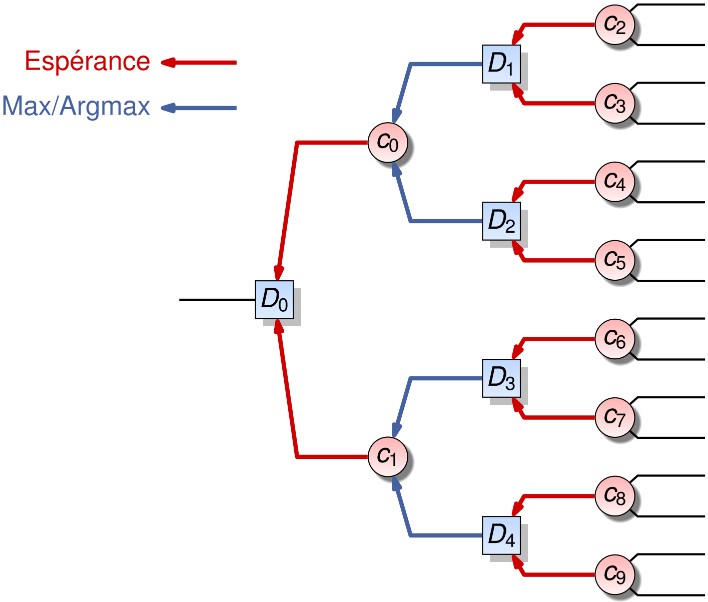
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



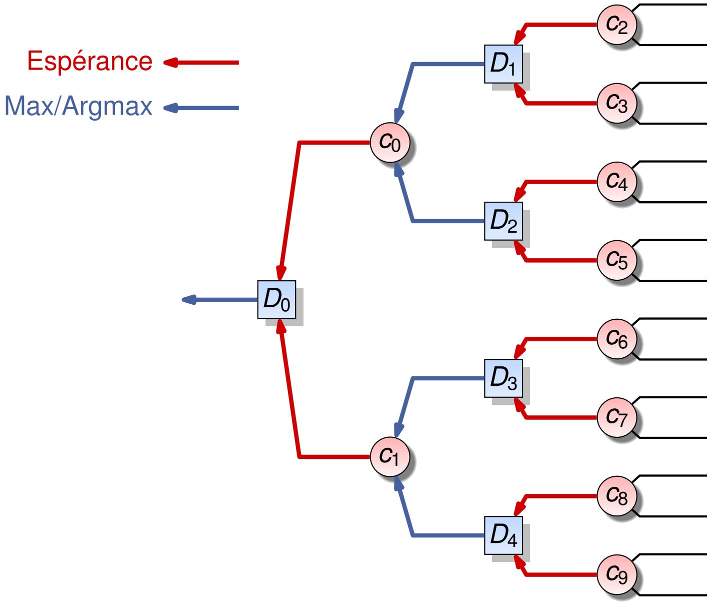
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance

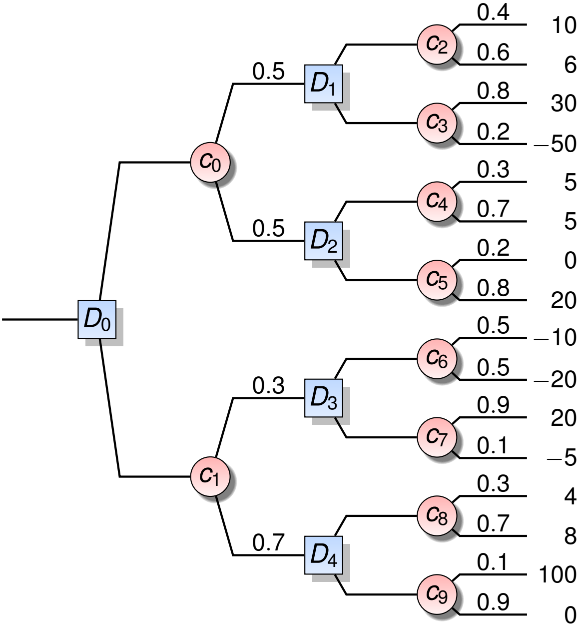


Résolution efficace : l'axiome d'indépendance

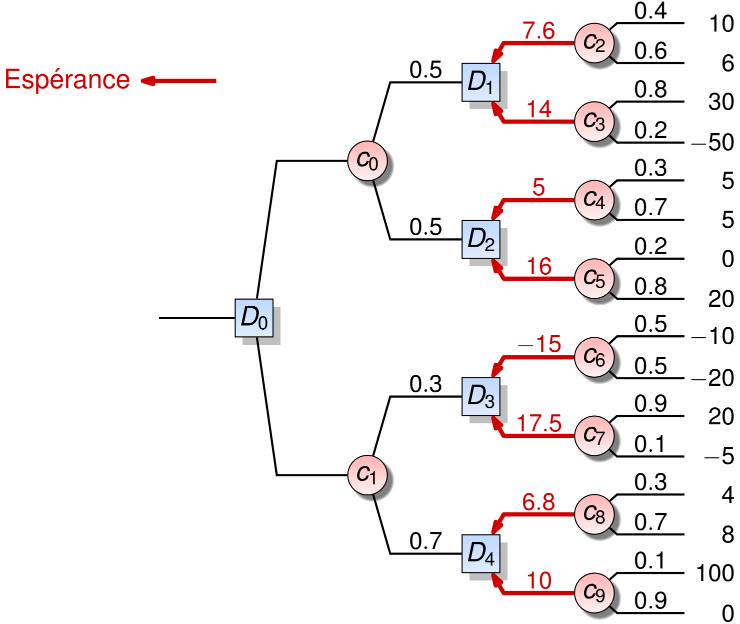


Résolution efficace : l'axiome d'indépendance

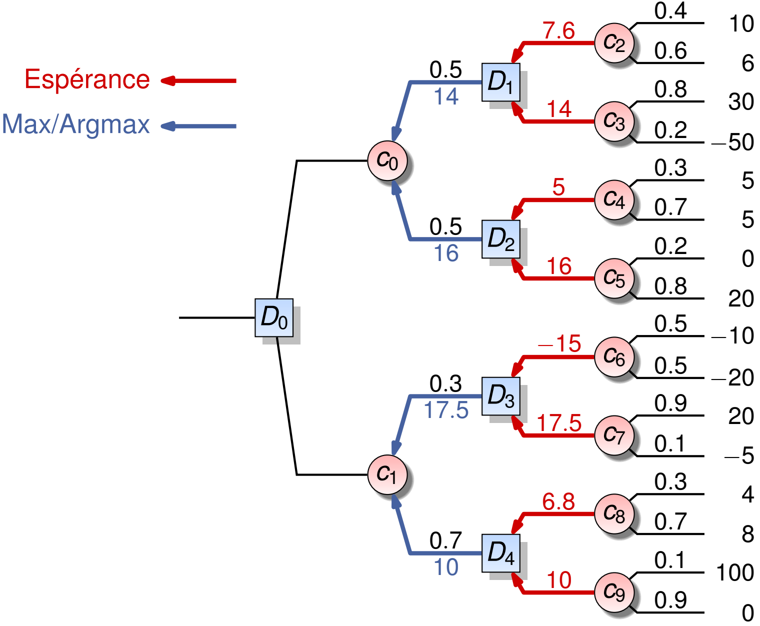



D_0
c_0
c_1
0.5
0.5
0.3
0.7
D_1
D_2
D_3
D_4
c_2
c_3
c_4
c_5
c_6
c_7
c_8
c_9
0.4
10
0.6
6
0.8
30
0.2
-50
0.3
5
0.7
5
0.2
0
0.8
20
0.5
-10
0.5
-20
0.9
20
0.1
-5
0.3
4
0.7
8
0.1
100
0.9
0

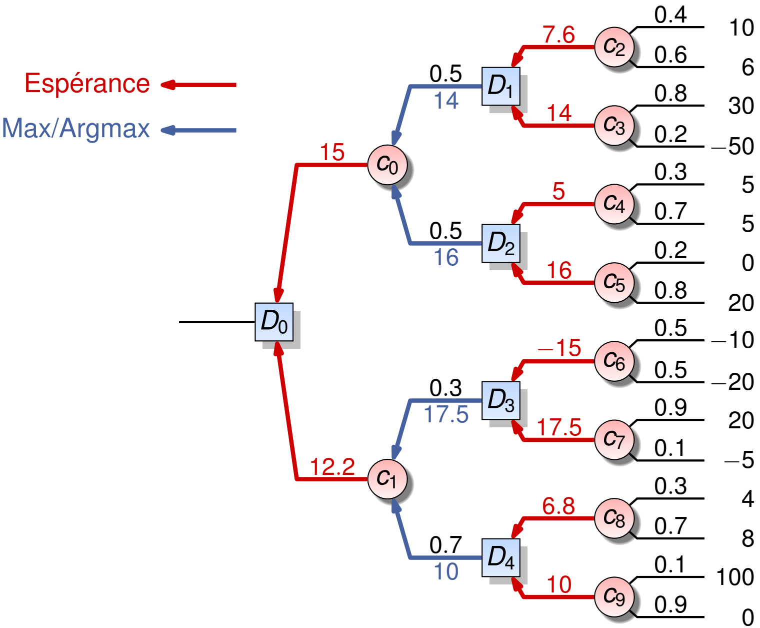
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



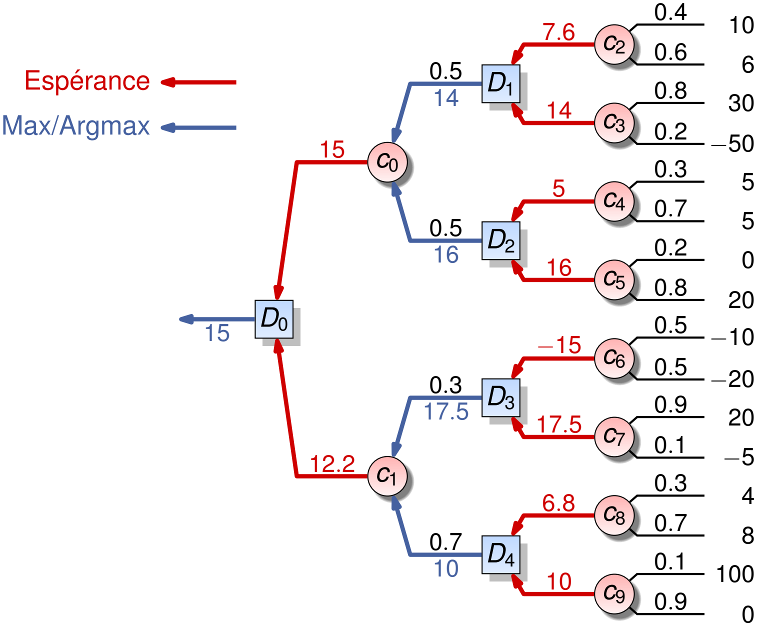
Résolution efficace : l'axiome d'indépendance

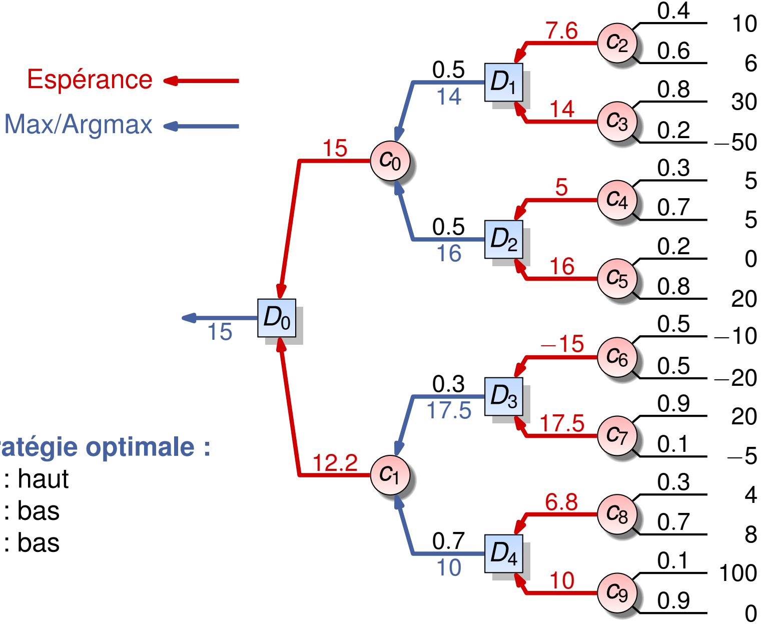


Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



Résolution efficace : l'axiome d'indépendance





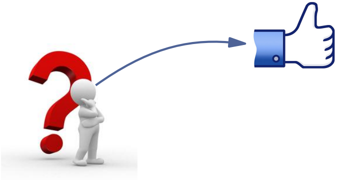
Stratégie optimale :

D_0 : haut

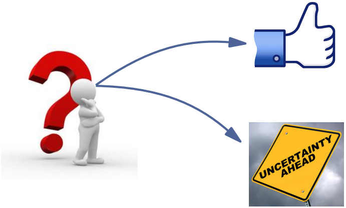
D_1 : bas

D_2 : bas

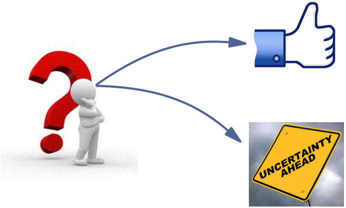
Résumé sur les modèles décisionnels



Résumé sur les modèles décisionnels

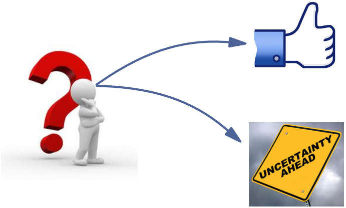


Résumé sur les modèles décisionnels



$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

Résumé sur les modèles décisionnels

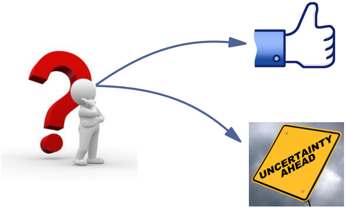


$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

3 préoccupations principales :

1. Choix du modèle décisionnel (justifications, axiomatiques)

Résumé sur les modèles décisionnels

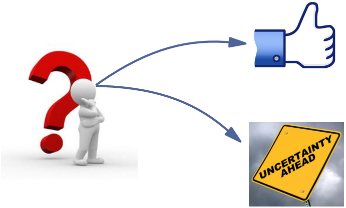


$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

3 préoccupations principales :

1. Choix du modèle décisionnel (justifications, axiomatiques)
2. Paramétrage (apprentissage / élicitation)

Résumé sur les modèles décisionnels

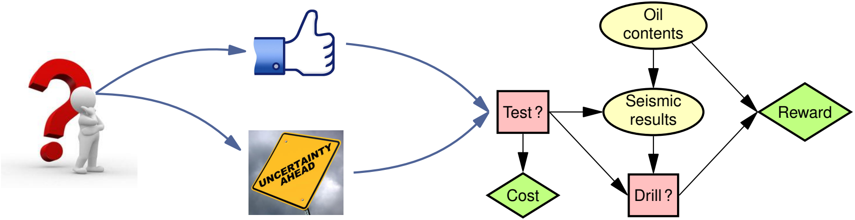


$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

3 préoccupations principales :

1. Choix du modèle décisionnel (justifications, axiomatiques)
2. Paramétrage (apprentissage / élicitation)
3. Exploitation $\Longrightarrow$ algorithmique / implantation

Résumé sur les modèles décisionnels

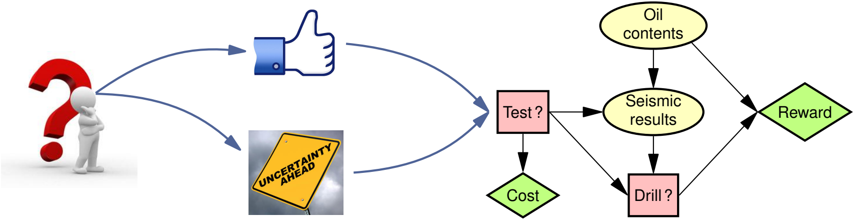


$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

3 préoccupations principales :

1. Choix du modèle décisionnel (justifications, axiomatiques)
2. Paramétrage (apprentissage / élicitation)
3. Exploitation $\Longrightarrow$ algorithmique / implantation

Résumé sur les modèles décisionnels



$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

3 préoccupations principales :

1. Choix du modèle décisionnel (justifications, axiomatiques)
2. Paramétrage (apprentissage / élicitation)
3. Exploitation $\Longrightarrow$ algorithmique / implantation

$\Longrightarrow$ Modèles graphiques décisionnels

- Cox, R.T. (1946) « Probability, frequency, and reasonable expectation », American Journal of Physics, 14(1) :1–13
- De Finetti, B. (1972) Theory of Probability,Wiley
- Dempster A.P. (1967) « Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping ». *Annals of Mathematical Statistics*, 38 :325–339
- Dubois, D. et Prade, H. (1985) Théorie des possibilités : Applications à la représentation des connaissances en informatique. Masson
- Ellsberg D. (1961) « Risk, ambiguity, and the Savage axioms », Quaterly Journal of Economics, 75 :643-669
- Halpern, J. (1999) « Cox's Theorem Revisited », Journal of Artificial Intelligence Research, 11 :429–435
- Savage, L.J. (1954) The foundations of statistics. Dover
- Shafer, G. (1976) A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press