cours 1
Introduction raisonnable

Master SID — Raisonnement dans l'incertain

Généralités sur le module

Objectif principal

Proposer quelques clefs pour raisonner dans l'incertain.

Compétences attendues

- Savoir manipuler les modèles vus en cours
- Connaître les limites de ces modèles

Déroulement du module

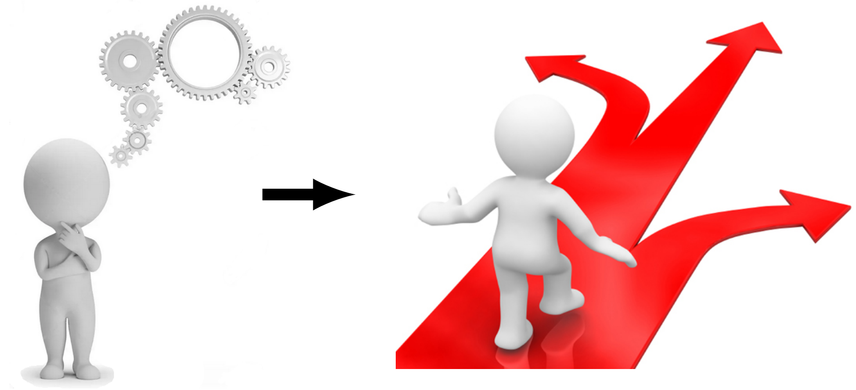
- 8 mini cours théoriques
- 7 TD
- 3 TP (en python/pyAgrum)

- Site du module : `https://pageperso.lis-lab.fr/christophe.gonzales/teaching/incertain`

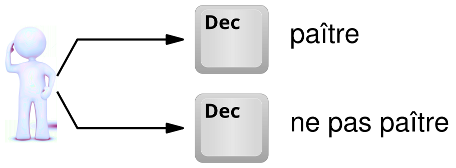
Évaluation

- Contrôle continu :
  - 7 mini-interros dont seules les 6 meilleures comptent
  - 1 TP noté
- Note finale = 60% examen + 20% mini-interros + 20% TP
- Seul document autorisé à l'examen :
  une feuille A4 recto-verso

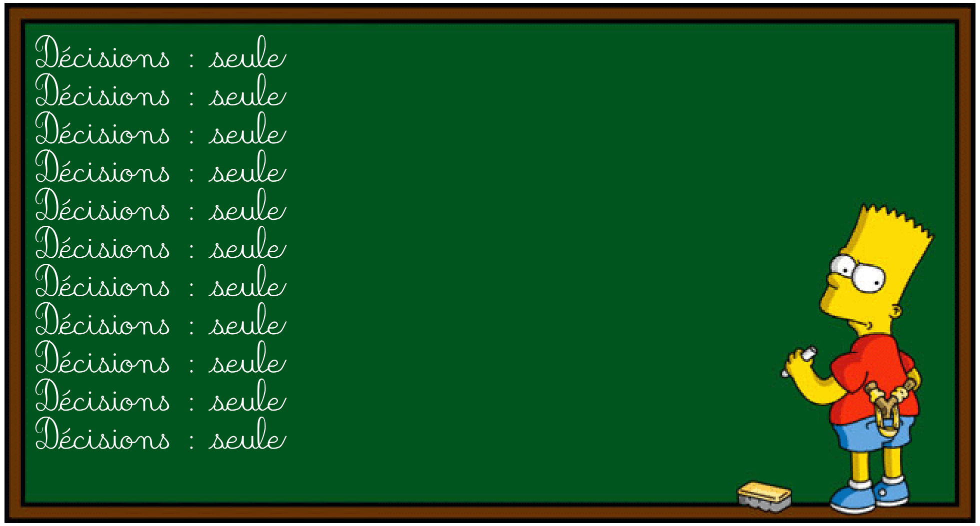
Pourquoi raisonner dans l'incertain ?



Prise de décision

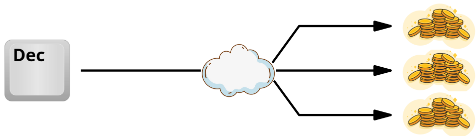


Savage (1954)



Représentation de décisions

Représentation selon Savage :

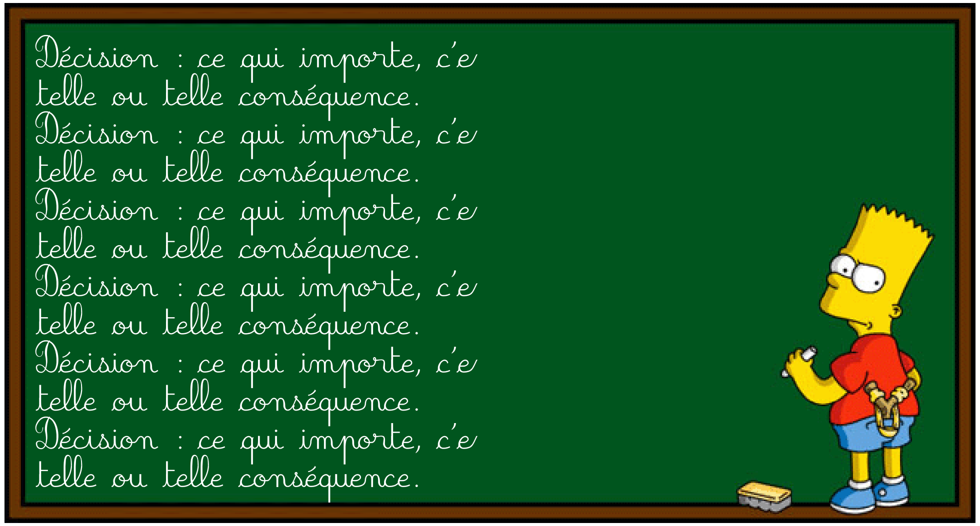


Décision $\Longleftrightarrow$ acte *[Savage (1954)]*

- Acte : fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences possibles
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature (événements élémentaires)

- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow acte(d_1) \succsim_{\mathcal{A}} acte(d_2)$

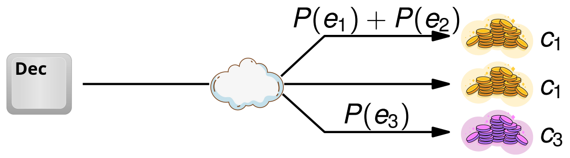
von Neumann-Morgenstern (1944)



Loteries : des actes simplifiés

von Neumann-Morgenstern (1944)

Ce qui importe, c'est uniquement la chance (**probabilité**) d'obtenir telle ou telle conséquence.

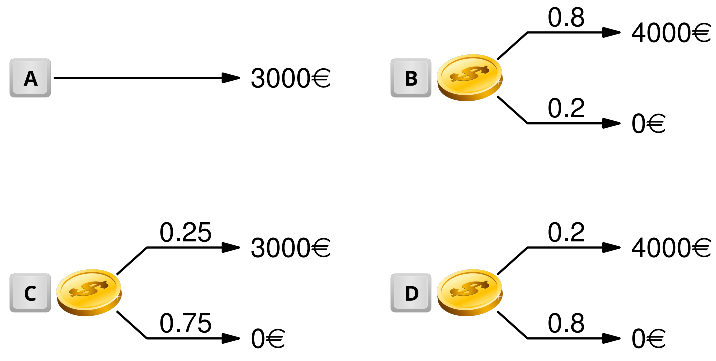


Loterie

- Loterie : $\langle (x_1, p_1), \ldots, (x_n, p_n) \rangle$
  ensemble de couples (conséquence, proba de la conséquence)
- $\mathcal{L}$: ensemble des loteries

- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow loterie(d_1) \succsim_{\mathcal{L}} loterie(d_2)$

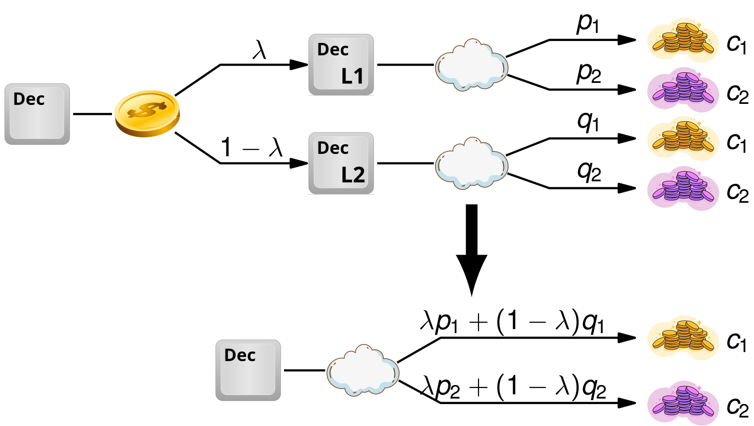
Exemple de prise de décision



$A \succ_{\mathcal{D}} B$

$D \succ_{\mathcal{D}} C$

Mixture de loteries



Mixture de loteries

- loterie(Dec) $=$ Mixture de L_1 et $L_2 = \lambda L_1 + (1-\lambda) L_2$

1er modèle décisionnel : von Neumann-Morgenstern

Axiome 1 : préordre large total

$\succsim_{\mathcal{L}}$: est un préordre large total non-trivial sur les loteries $\mathcal{L}$

Axiome 2 : continuité

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$ t.q. $P \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} R$, il existe $\alpha, \beta \in]0,1[$ t.q. :

$$\alpha P + (1-\alpha)R \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} \beta P + (1-\beta)R.$$

Axiome 3 : indépendance

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in]0,1]$:

$$P \succsim_{\mathcal{L}} Q \Longleftrightarrow \alpha P + (1-\alpha)R \succsim_{\mathcal{L}} \alpha Q + (1-\alpha)R.$$

Théorème *[von Neumann-Morgenstern (1944)]*

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\succsim_{\mathcal{L}}$ vérifie les axiomes 1,2,3.
2. $\succsim_{\mathcal{L}}$ est représentable par une fonction U t.q. $U(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$ où $u : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ t.q. $u(x_i) = U(\langle x_i, 1 \rangle)$.

Du loto à la loterie

- 1 ticket de loto coûte 2 €
- $\mathcal{X} = \begin{cases} A : \text{gagner } 10\,€ & P(A) = 1/50 \\ B : \text{gagner 1 million } € & P(B) = 1/2000000 \\ C : \text{ne rien gagner} & P(C) = 1 - P(A) - P(B) \end{cases}$

Question : doit-on acheter un ticket (décision D_1) ou non (D_2) ?

- $U(D_1) = P(A) \times u((10-2)\,€) + P(B) \times u((10^6-2)\,€) + P(C) \times u(-2\,€)$
- $U(D_2) = u(0\,€)$

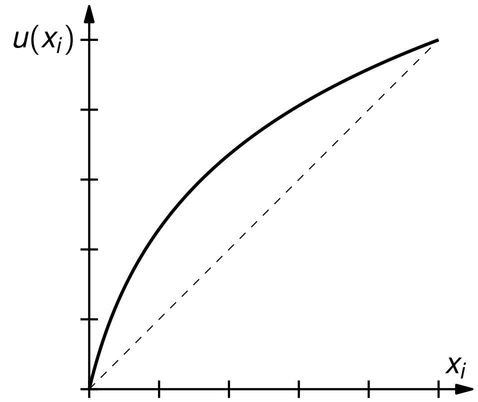
Réponse :

- Si $u(x) = x$: $U(d_1) = -1,3$ et $U(D_2) = 0 \Longrightarrow$ ne pas acheter le ticket
- Si $u(x) = x^2$: $U(d_1) = 500003,2$ et $U(D_2) = 0 \Longrightarrow$ acheter le ticket

$u(x)$: utilité de Von Neumann-Morgenstern

$u(x_i)$: satisfaction d'obtenir la conséquence x_i

$\Longrightarrow$ représente les préférences de l'agent



De vNM à la conduite sportive

2ème modèle décisionnel : Savage

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »
- Si P1 à P7 vérifiées :
  - l'agent modélise les incertitudes par des probabilités.
  - l'agent a des préférences $\succsim_{\mathcal{A}}$ sur les actes représentables par un modèle d'espérance d'utilité (EU) :

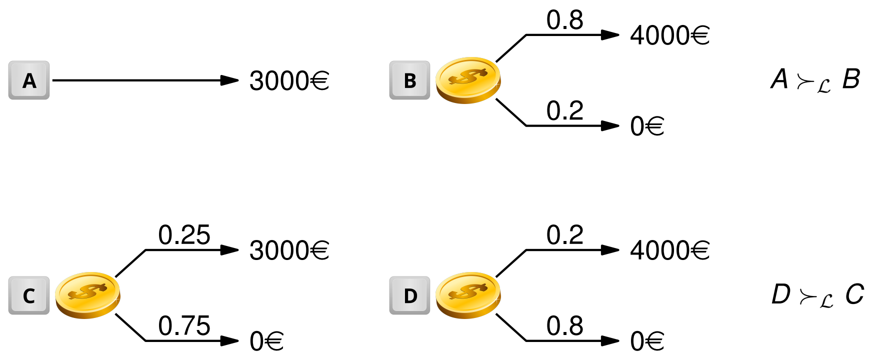
$$f \succsim_{\mathcal{A}} g \Longleftrightarrow U(f) \geq U(g)$$
$$U(f) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) u(f(s))$$

- Probabilités $\Longrightarrow$ subjectives !

Rappel : pas de notion de probabilité dans les actes

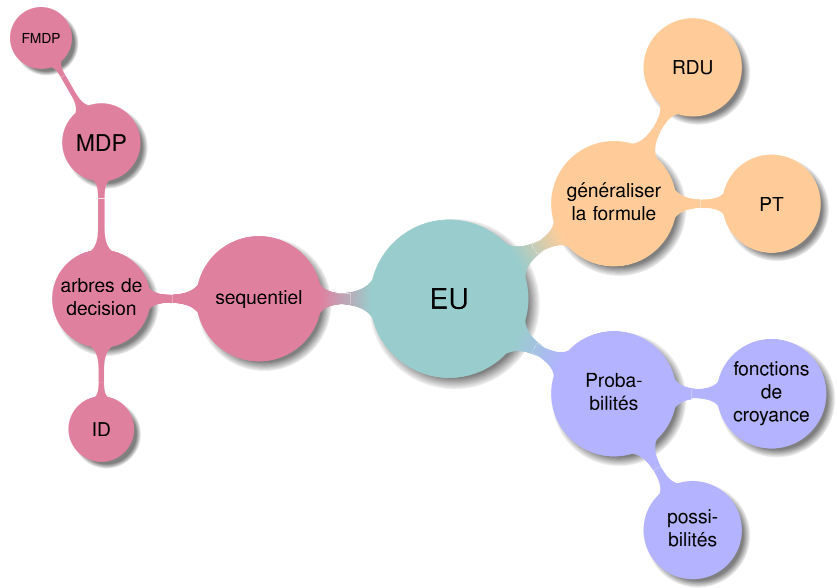
Limites de EU

- Kahneman & Tversky :

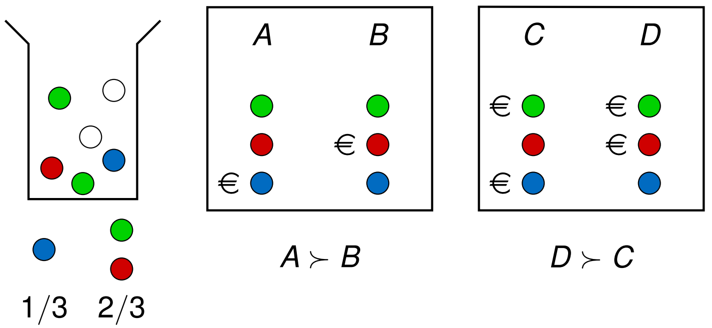


$\Longrightarrow$ Violation de l'axiome d'indépendance

Peut-on aller au delà de EU ?



L'urne d'Ellsberg (1961)



$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle / axiome d'indépendance

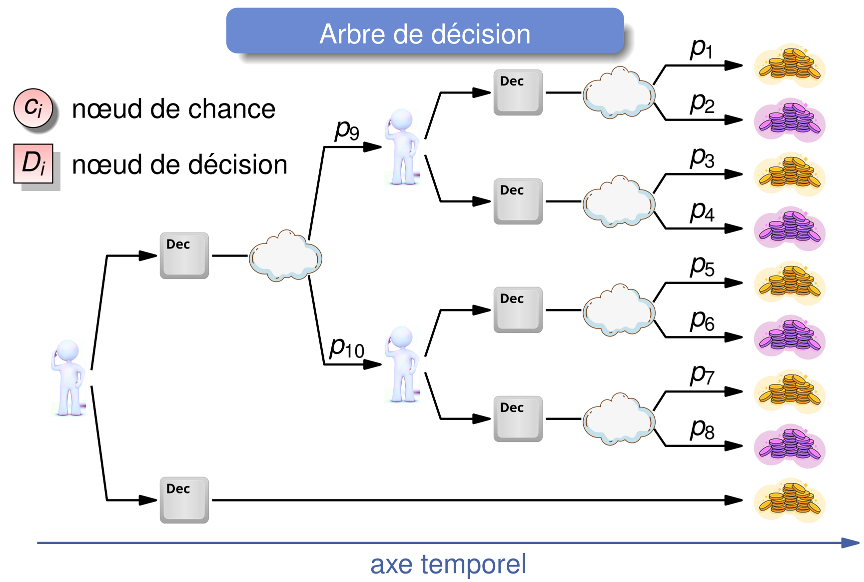
$\Longrightarrow$ pas représentable par des probabilités

⚠ représentable par des fonctions de croyance !

$\Longrightarrow$ Il existe différentes rationalités

Dépendent des informations disponibles (imprécises, floues, incomplètes, etc.)

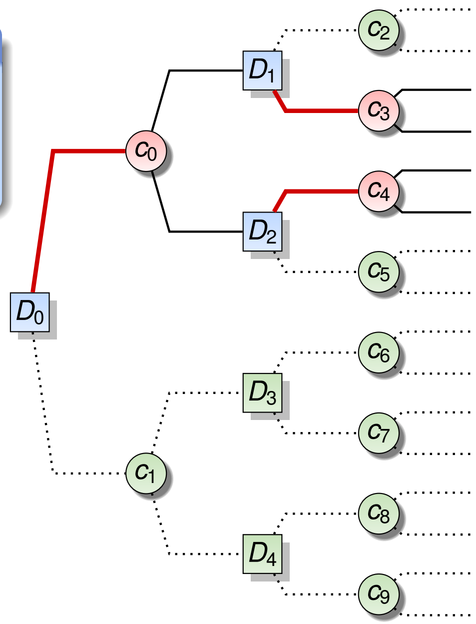
Des loteries aux arbres de décision



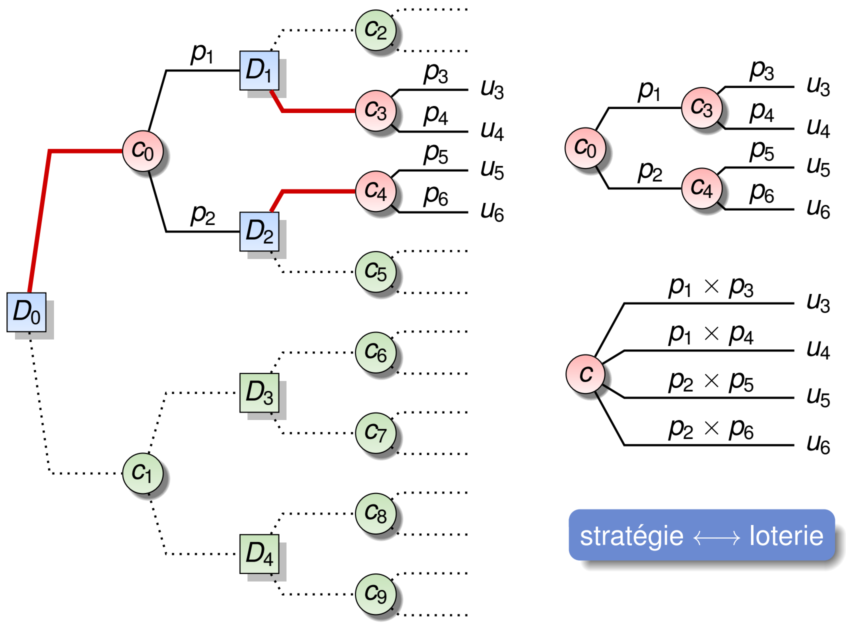
Décisions optimales dans un arbre de décision

Stratégie

Choisir une branche (rouge) pour tout nœud de décision D_i accessible (bleu).

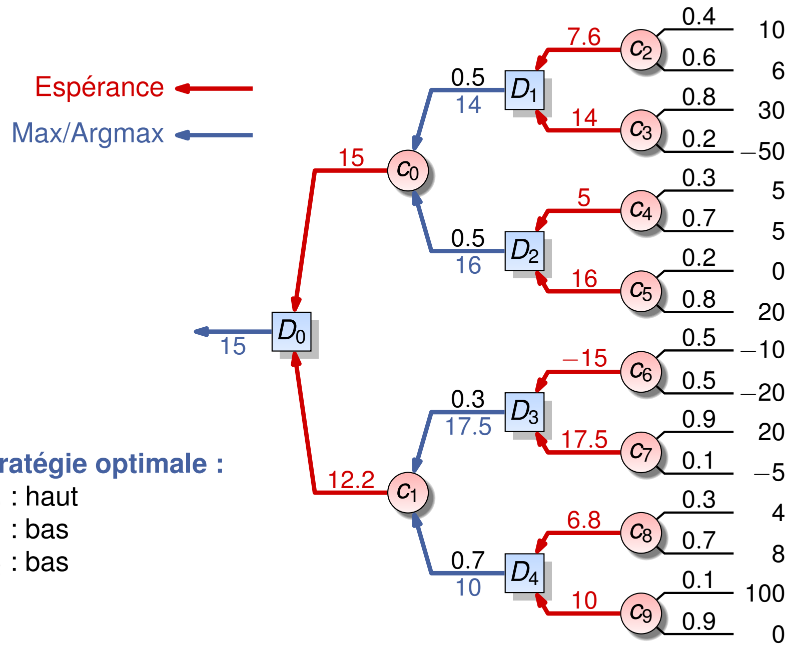


Décisions optimales dans un arbre de décision



stratégie $\longleftrightarrow$ loterie

Résolution efficace : l'axiome d'indépendance



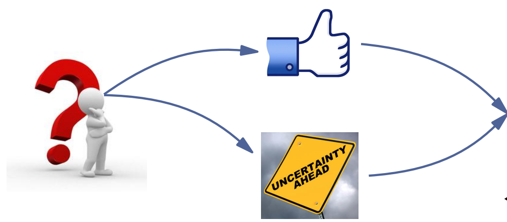
Stratégie optimale :

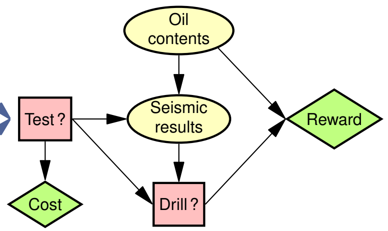
D_0 : haut

D_1 : bas

D_2 : bas

Résumé sur les modèles décisionnels





$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

3 préoccupations principales :

1. Choix du modèle décisionnel (justifications, axiomatiques)
2. Paramétrage (apprentissage / élicitation)
3. Exploitation $\Longrightarrow$ algorithmique / implantation

$\Longrightarrow$ Modèles graphiques décisionnels

Bibliographie

- Cox, R.T. (1946) « Probability, frequency, and reasonable expectation », American Journal of Physics, 14(1) :1–13
- De Finetti, B. (1972) Theory of Probability,Wiley
- Dempster A.P. (1967) « Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping ». *Annals of Mathematical Statistics*, 38 :325–339
- Dubois, D. et Prade, H. (1985) Théorie des possibilités : Applications à la représentation des connaissances en informatique. Masson
- Ellsberg D. (1961) « Risk, ambiguity, and the Savage axioms », Quaterly Journal of Economics, 75 :643-669
- Halpern, J. (1999) « Cox's Theorem Revisited », Journal of Artificial Intelligence Research, 11 :429–435
- Savage, L.J. (1954) The foundations of statistics. Dover
- Shafer, G. (1976) A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press