cours 1
Introduction raisonnable

Master SID — Raisonnement dans l'incertain

Généralités sur le module

Objectif principal

Proposer quelques clefs pour raisonner dans l'incertain.

Compétences attendues

- Savoir manipuler les modèles vus en cours
- Connaître les limites de ces modèles

Déroulement du module

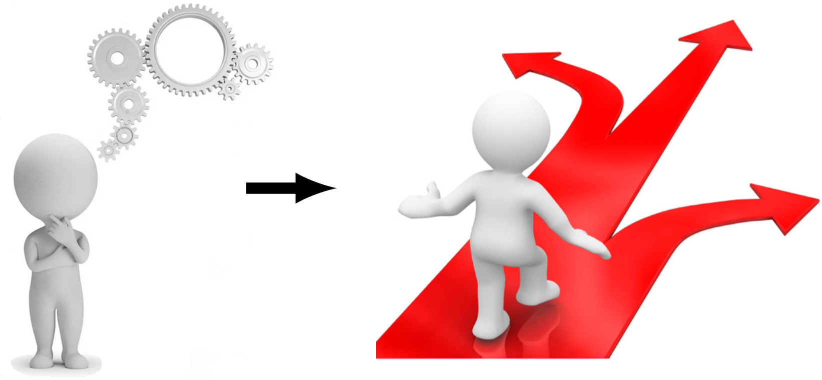
- 8 mini cours théoriques
- 7 TD
- 3 TP (en python/pyAgrum)

- Site du module : `https://pageperso.lis-lab.fr/christophe.gonzales/teaching/incertain`

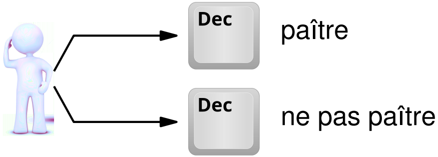
Évaluation

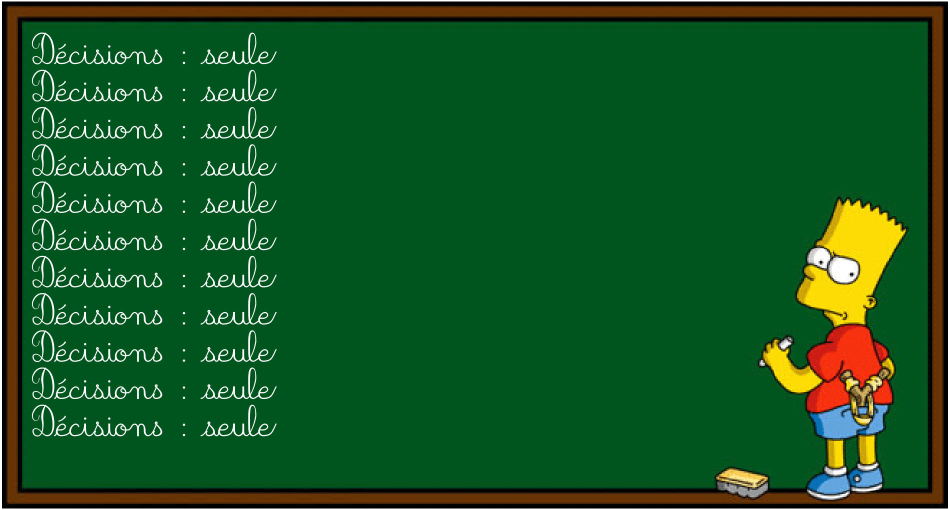
- Contrôle continu :
  - 7 mini-interros dont seules les 6 meilleures comptent
  - 1 TP noté
- Note finale = 60% examen + 20% mini-interros + 20% TP
- Seul document autorisé à l'examen :
  une feuille A4 recto-verso

Pourquoi raisonner dans l'incertain ?



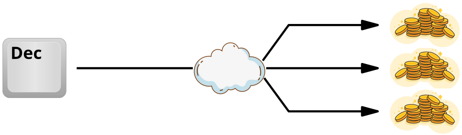
Prise de décision




Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule
Décisions : seule

Représentation de décisions

Représentation selon Savage :

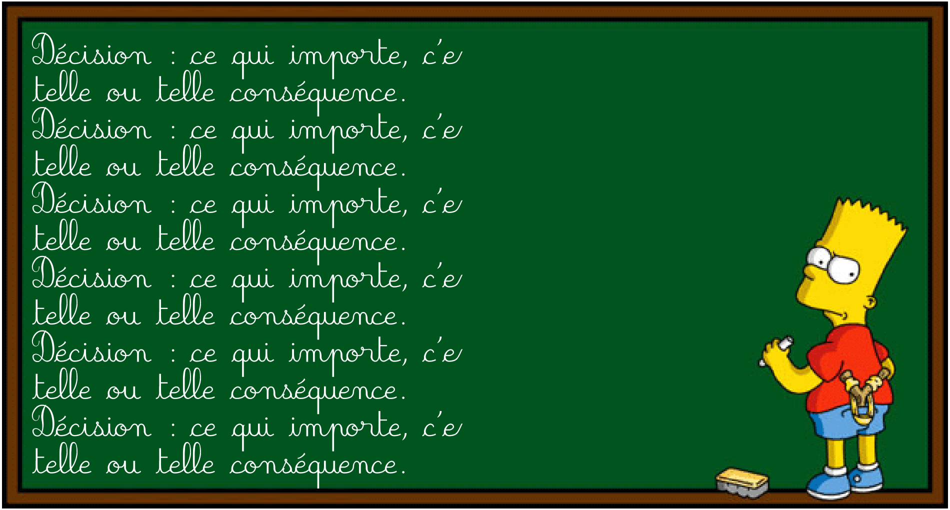


Décision $\Longleftrightarrow$ acte *[Savage (1954)]*

- Acte : fonction $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{X}$
- $\mathcal{X}$: ensemble des conséquences possibles
- $\mathcal{S}$: ensemble des états de la nature (événements élémentaires)

- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow acte(d_1) \succsim_{\mathcal{A}} acte(d_2)$

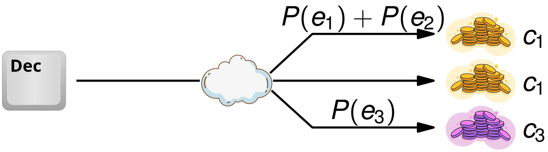
von Neumann-Morgenstern (1944)



Loteries : des actes simplifiés

von Neumann-Morgenstern (1944)

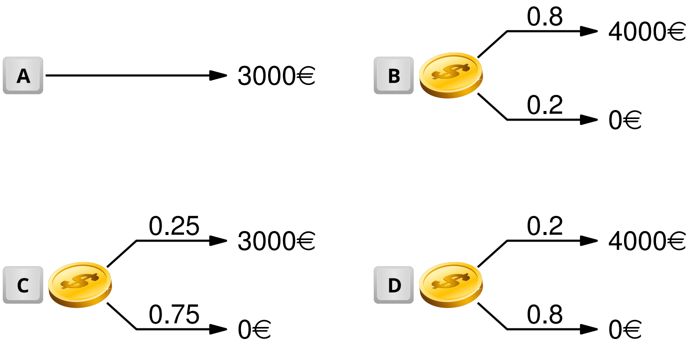
Ce qui importe, c'est uniquement la chance (**probabilité**) d'obtenir telle ou telle conséquence.



Loterie

- Loterie : $\langle (x_1, p_1), \ldots, (x_n, p_n) \rangle$
  ensemble de couples (conséquence, proba de la conséquence)
- $\mathcal{L}$: ensemble des loteries

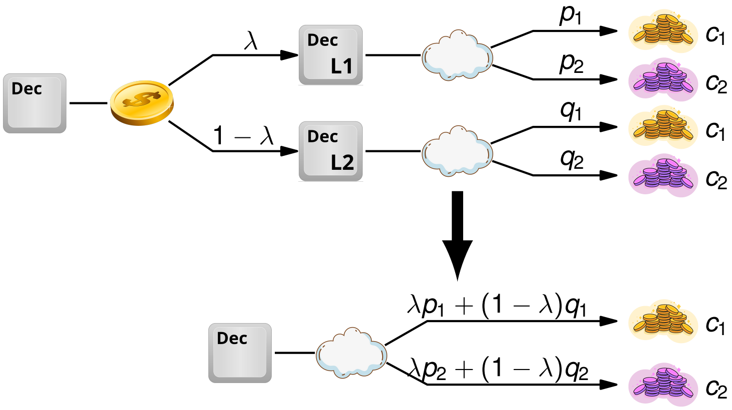
- $d_1 \succsim_{\mathcal{D}} d_2 \Longleftrightarrow loterie(d_1) \succsim_{\mathcal{L}} loterie(d_2)$



$A \succ_{\mathcal{D}} B$

$D \succ_{\mathcal{D}} C$

Mixture de loteries



Mixture de loteries

- loterie(Dec) $=$ Mixture de L_1 et $L_2 = \lambda L_1 + (1-\lambda) L_2$

1er modèle décisionnel : von Neumann-Morgenstern

Axiome 1 : préordre large total

$\succsim_{\mathcal{L}}$: est un préordre large total non-trivial sur les loteries $\mathcal{L}$

Axiome 2 : continuité

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$ t.q. $P \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} R$, il existe $\alpha, \beta \in]0, 1[$ t.q. :

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \succ_{\mathcal{L}} Q \succ_{\mathcal{L}} \beta P + (1 - \beta)R.$$

Axiome 3 : indépendance

$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$, $\forall \alpha \in]0, 1]$:

$$P \succsim_{\mathcal{L}} Q \Longleftrightarrow \alpha P + (1 - \alpha)R \succsim_{\mathcal{L}} \alpha Q + (1 - \alpha)R.$$

Théorème *[von Neumann-Morgenstern (1944)]*

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\succsim_{\mathcal{L}}$ vérifie les axiomes 1,2,3.
2. $\succsim_{\mathcal{L}}$ est représentable par une fonction U t.q. $U(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$ où $u : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ t.q. $u(x_i) = U(\langle x_i, 1 \rangle)$.

Du loto à la loterie

- 1 ticket de loto coûte 2 €
- $\mathcal{X} = \begin{cases} A : \text{gagner } 10\,€ & P(A) = 1/50 \\ B : \text{gagner 1 million } € & P(B) = 1/2000000 \\ C : \text{ne rien gagner} & P(C) = 1 - P(A) - P(B) \end{cases}$

Question : doit-on acheter un ticket (décision D_1) ou non (D_2) ?

- $U(D_1) = P(A) \times u((10-2)\,€) + P(B) \times u((10^6-2)\,€) + P(C) \times u(-2\,€)$
- $U(D_2) = u(0\,€)$

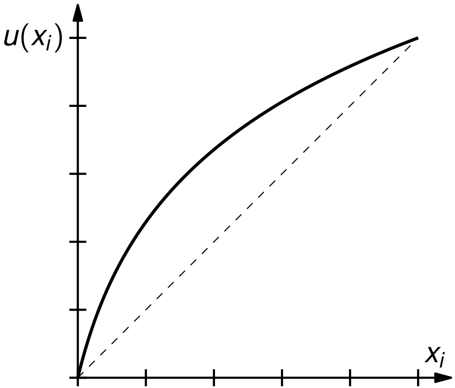
Réponse :

- Si $u(x) = x$: $U(d_1) = -1,3$ et $U(D_2) = 0 \Longrightarrow$ ne pas acheter le ticket
- Si $u(x) = x^2$: $U(d_1) = 500003,2$ et $U(D_2) = 0 \Longrightarrow$ acheter le ticket

$u(x)$: utilité de Von Neumann-Morgenstern

$u(x_i)$: satisfaction d'obtenir la conséquence x_i

$\Longrightarrow$ représente les préférences de l'agent



De vNM à la conduite sportive

Axiomatique de Savage (1954)

- 7 propriétés sur les actes P1–P7
- P1–P7 $\Longrightarrow$ agent « rationnel »
- Si P1 à P7 vérifiées :
  - l'agent modélise les incertitudes par des probabilités.
  - l'agent a des préférences $\succsim_{\mathcal{A}}$ sur les actes représentables par un modèle d'espérance d'utilité (EU) :

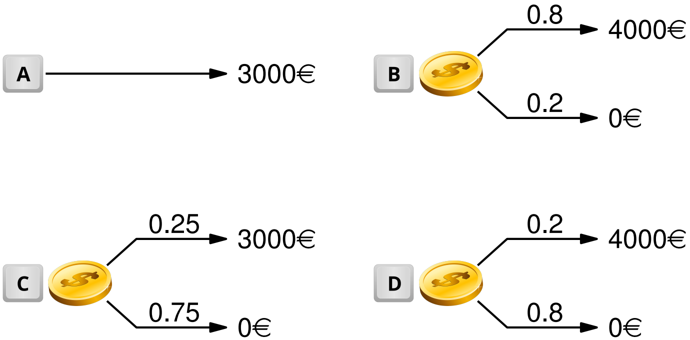
$$f \succsim_{\mathcal{A}} g \Longleftrightarrow U(f) \geq U(g)$$
$$U(f) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) u(f(s))$$

- Probabilités $\Longrightarrow$ subjectives !

⚠ Rappel : pas de notion de probabilité dans les actes

Limites de EU

- Kahneman & Tversky :

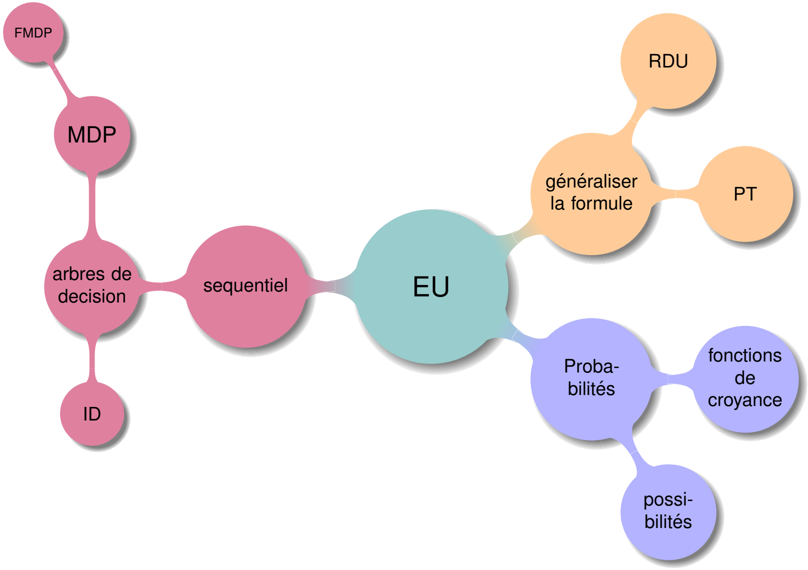


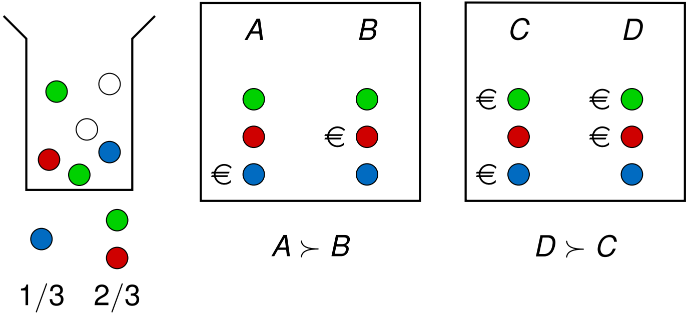
$A \succ_{\mathcal{L}} B$

$D \succ_{\mathcal{L}} C$

$\Longrightarrow$ Violation de l'axiome d'indépendance

Peut-on aller au delà de EU ?





$\Longrightarrow$ Violation du Sure thing principle / axiome d’indépendance

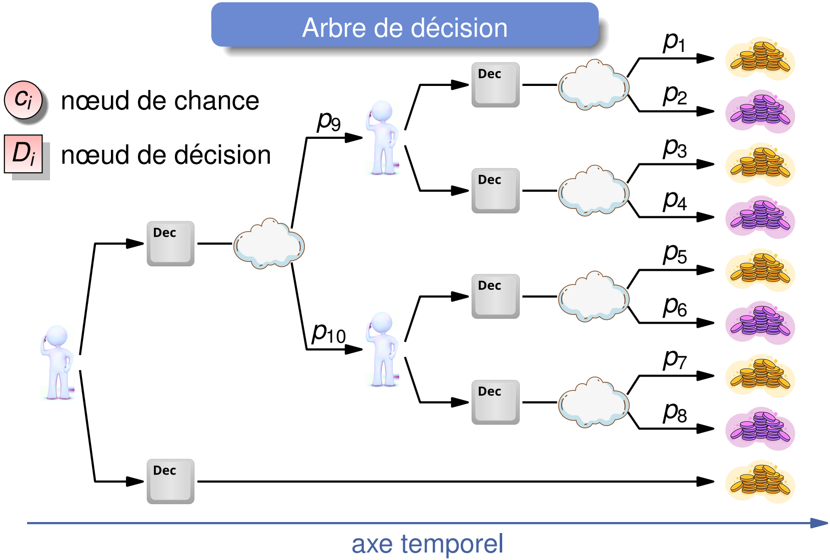
$\Longrightarrow$ pas représentable par des probabilités

⚠ représentable par des fonctions de croyance !

$\Longrightarrow$ Il existe différentes rationalités

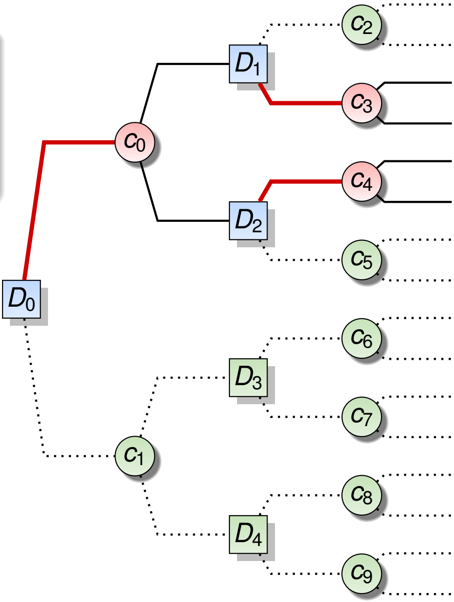
Dépendent des informations disponibles (imprécises, floues, incomplètes, etc.)

Des loteries aux arbres de décision

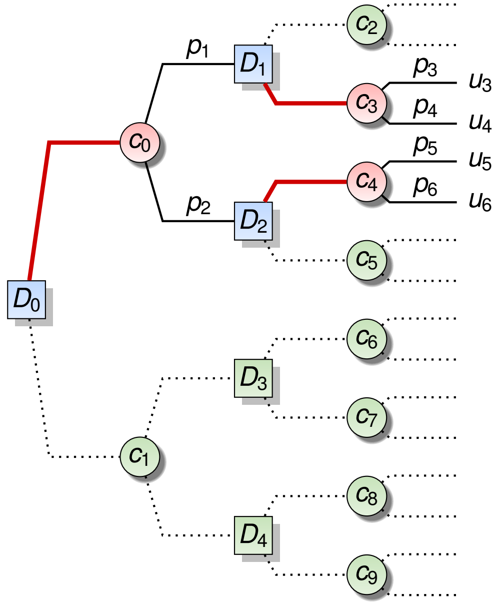


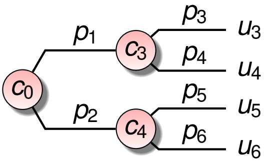
Stratégie

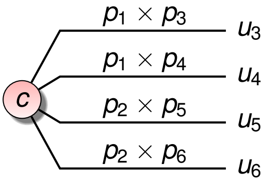
Choisir une branche (rouge) pour tout nœud de décision D_i accessible (bleu).



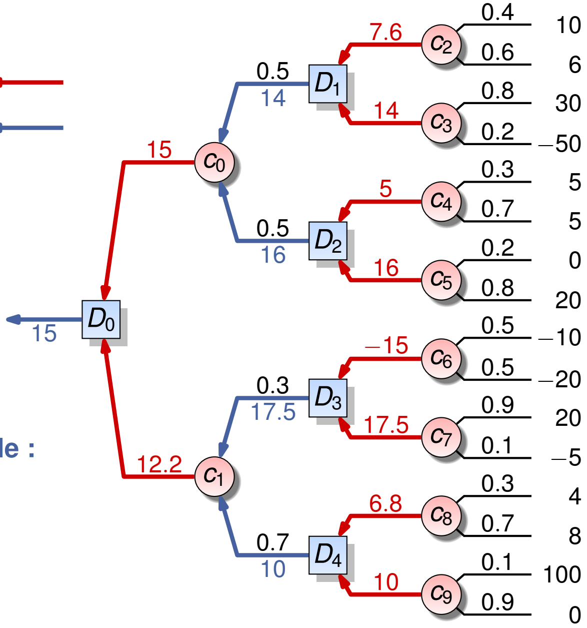
Décisions optimales dans un arbre de décision







stratégie $\longleftrightarrow$ loterie



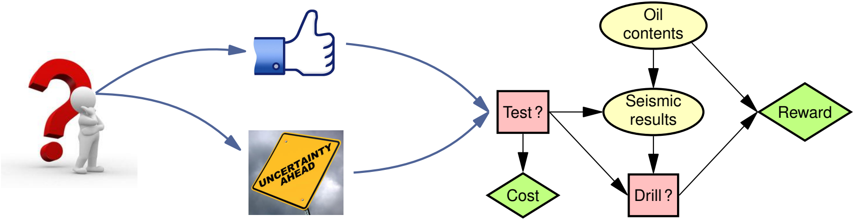
Stratégie optimale :

D_0 : haut

D_1 : bas

D_2 : bas

Résumé sur les modèles décisionnels



$\Longrightarrow$ Modèle décisionnel $\equiv$ préférences + incertitudes

3 préoccupations principales :

1. Choix du modèle décisionnel (justifications, axiomatiques)
2. Paramétrage (apprentissage / élicitation)
3. Exploitation $\Longrightarrow$ algorithmique / implantation

$\Longrightarrow$ Modèles graphiques décisionnels

Bibliographie

- Cox, R.T. (1946) « Probability, frequency, and reasonable expectation », American Journal of Physics, 14(1) :1–13
- De Finetti, B. (1972) Theory of Probability,Wiley
- Dempster A.P. (1967) « Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping ». *Annals of Mathematical Statistics*, 38 :325–339
- Dubois, D. et Prade, H. (1985) Théorie des possibilités : Applications à la représentation des connaissances en informatique. Masson
- Ellsberg D. (1961) « Risk, ambiguity, and the Savage axioms », Quaterly Journal of Economics, 75 :643-669
- Halpern, J. (1999) « Cox's Theorem Revisited », Journal of Artificial Intelligence Research, 11 :429–435
- Savage, L.J. (1954) The foundations of statistics. Dover
- Shafer, G. (1976) A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press