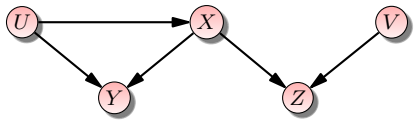
Aix*Marseille université Initiative d'excellence **Master SID**

Raisonnement dans l'incertain

TD n°3 : Indépendances et d-séparation

Exercice 1 – Indépendances et réseau bayésien

La loi jointe $P(U, X, V, Y, Z)$ de 5 variables aléatoires U, X, V, Y, Z admet le graphe d'indépendance G de la figure ci-dessous :



Q 1.1 Comment $P(U, X, V, Y, Z)$ se décompose-t-elle ?

Q 1.2 En supposant que l'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été U, X, V, Y, Z, quelles sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui ont servi à construire ce graphe ?

Q 1.3 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

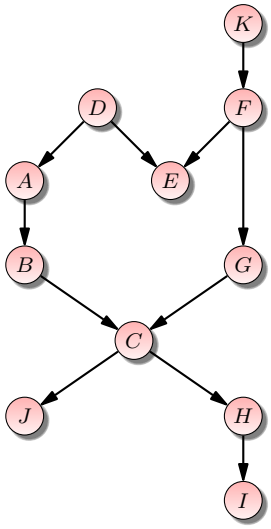
$V \perp\!\!\!\perp (X, Y)$? $\quad U \perp\!\!\!\perp (V, X)$? $\quad U \perp\!\!\!\perp V | (Y, Z)$?

$U \perp\!\!\!\perp V | (X, Y)$? $\quad U \perp\!\!\!\perp V | (X, Y, Z)$?

©CG(2026)

Exercice 2 – d-séparation

On considère le réseau bayésien suivant, de structure $\mathcal{G}$:

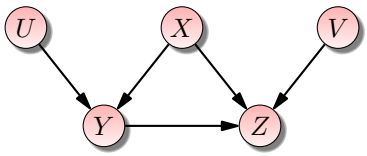


Q 2.1 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$\langle A \perp_{\mathcal{G}} G \rangle$? $\langle A \perp_{\mathcal{G}} G | E \rangle$? $\langle A \perp_{\mathcal{G}} G | \{E, F, I\} \rangle$?

Exercice 3 – Indépendances...

La loi jointe $P(U, X, V, Y, Z)$ des 5 variables aléatoires (U, X, V, Y, Z) admet le graphe d'indépendance $\mathcal{G}$ de la figure ci-dessous :



Q 3.1 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$V \perp\!\!\!\perp \{X, Y\}$? $U \perp\!\!\!\perp \{V, X\}$? $U \perp\!\!\!\perp V | \{Y, Z\}$?

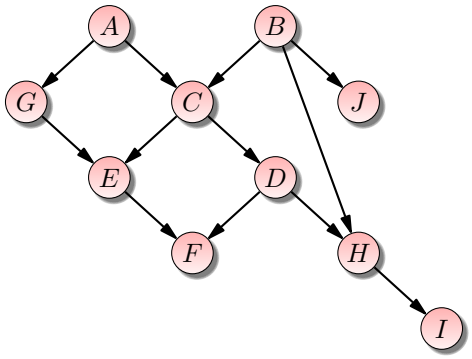
$U \perp\!\!\!\perp V | \{X, Y\}$? $U \perp\!\!\!\perp V | \{X, Y, Z\}$?

Q 3.2 L'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été $UXVYZ$; quelles sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui ont servi à construire le graphe ?

Comment $P(U, X, V, Y, Z)$ se décompose-t-elle ?

Exercice 4 – Indépendances bis...

Soit le réseau bayésien :



Q 4.1 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $H \perp\!\!\!\perp E$? Vous justifierez votre réponse.

Q 4.2 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $H \perp\!\!\!\perp E|C$?

Q 4.3 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $A \perp\!\!\!\perp B|I$?

Q 4.4 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $A \perp\!\!\!\perp I|D, F, H$?

Exercice 5 – Diagnostic moteur

Une pièce de moteur automobile (bielle) cassera (variable C) certainement prématurément (avant 100.000 km) si elle est défectueuse (variable D) ou s'il y a eu insuffisance d'entretien (variable I). Les 3 variables aléatoires (D, I, C) ont toutes pour valeurs $\{o(ui), n(on)\}$ et leur loi jointe est donnée par les tableaux suivants ($a, b \in]0, 1[$, $\overline{a} = 1 - a$, $\overline{b} = 1 - b$) :

$P(D = d, I = i, C = o) =$

	$I = o$	$I = n$
$D = o$	$a.b$	$a.\overline{b}$
$D = n$	$\overline{a}.b$	0

$P(D = d, I = i, C = n) =$

	$I = o$	$I = n$
$D = o$	0	0
$D = n$	0	$\overline{a}.\overline{b}$

Q 5.1 Est-ce que : $I \perp\!\!\!\perp D$? $I \perp\!\!\!\perp D|C$? Tracer le graphe du RB associé aux trois variables pour l'ordre d'énumération (D, I, C).

Q 5.2 Quelle est la probabilité pour que la rupture de la pièce soit due à ce qu'elle était défectueuse ?

Q 5.3 On apprend que l'entretien a été insuffisant. Quelle est maintenant la probabilité pour que la rupture de la pièce soit due à ce qu'elle était défectueuse ? Comparer cette probabilité avec la précédente.

Exercice 6 – Réseau bayésien

La loi jointe des 7 variables aléatoires (A, B, C, D, E, F, G) vérifie les relations d'indépendance suivantes :

$$B \perp\!\!\!\perp A \; ; \quad C \perp\!\!\!\perp \{A, B\} \; ; \quad D \perp\!\!\!\perp C | \{A, B\} \; ; \quad E \perp\!\!\!\perp \{A, D\} | \{B, C\} \; ;$$
$$F \perp\!\!\!\perp \{A, B, C\} | \{D, E\} \; ; \quad G \perp\!\!\!\perp \{A, B, C, D, E\} | F.$$

Q 6.1 Construire le graphe d'indépendance correspondant lorsque les variables sont rangées dans l'ordre A, B, C, D, E, F, G.

Q 6.2 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$$A \perp\!\!\!\perp C | \{D, E\} \; ; \quad A \perp\!\!\!\perp C | \{B, D, E\} \; ; \quad A \perp\!\!\!\perp C | G \; ; \quad A \perp\!\!\!\perp C | \{B, D, E, F\}.$$