Master SID

Raisonnement dans l'incertain

TD n°3 : Paramètres et indépendances

Exercice 1 – Maximum de vraisemblance

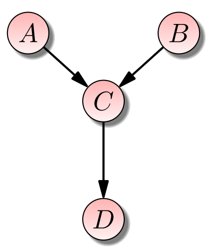
Soit X une variable aléatoire définie sur l'ensemble des nombres entiers positifs. X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ si $P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$. On a observé 5 réalisations (obtenues indépendamment les unes des autres) d'une variable X suivant la loi géométrique : $\boxed{4}\boxed{2}\boxed{6}\boxed{5}\boxed{8}$.

Q 1.1 Estimez par maximum de vraisemblance la valeur du paramètre $\theta = p$ de la loi.

Q 1.2 Avant le tirage de l'échantillon, nous avions une connaissance a priori sur le paramètre θ : ce dernier suivait a priori une loi Beta de paramètres 4 et 5, autrement dit $\pi(\theta) \propto \theta^3(1-\theta)^4$. Estimez la valeur du paramètre $\theta = p$ par maximum a posteriori.

Exercice 2 – BD et paramètres d'un RB

Soit trois variables aléatoires booléennes A, B, C et une variable ternaire D. Un expert nous a fourni la structure du réseau bayésien de ces quatre variables :



On a constitué la base de données ci-dessous :

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_2	c_1	d_2
a_1	b_1	c_2	d_3
a_2	b_1	c_2	d_1
a_2	b_1	c_1	d_3
a_2	b_1	c_2	d_2
a_2	b_2	c_1	d_3
a_1	b_2	c_2	d_3
a_2	b_1	c_2	d_1
a_2	b_2	c_1	d_3

Q 2.1 Apprenez par maximum de vraisemblance les paramètres du réseau bayésien.

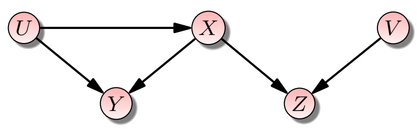
Q 2.2 L'expert nous fournit un *a priori* de Dirichlet pour mieux estimer la table $P(C|A,B)$. Estimer par maximum *a posteriori* cette table.

$\alpha_{ijk}(C|A,B) =$

	c_1	c_2
a_1, b_1	5	3
a_1, b_2	2	1
a_2, b_1	1	1
a_2, b_2	3	7

Exercice 3 – Indépendances et réseau bayésien

La loi jointe $P(U,X,V,Y,Z)$ de 5 variables aléatoires U,X,V,Y,Z admet le graphe d'indépendance G de la figure ci-dessous :



Q 3.1 Comment $P(U,X,V,Y,Z)$ se décompose-t-elle ?

Q 3.2 En supposant que l'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été U,X,V,Y,Z, quelles sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui ont servi à construire ce graphe ?

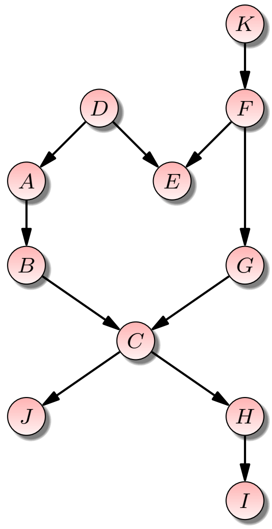
Q 3.3 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$V \perp\!\!\!\perp (X,Y)$? $\quad U \perp\!\!\!\perp (V,X)$? $\quad U \perp\!\!\!\perp V|(Y,Z)$?

$U \perp\!\!\!\perp V|(X,Y)$? $\quad U \perp\!\!\!\perp V|(X,Y,Z)$?

Exercice 4 – d-séparation

On considère le réseau bayésien suivant, de structure $\mathcal{G}$:

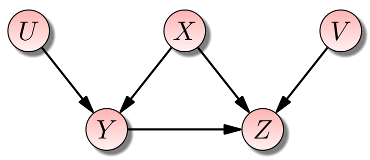


Q 4.1 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$\langle A \perp_{\mathcal{G}} G \rangle$? $\langle A \perp_{\mathcal{G}} G|E \rangle$? $\langle A \perp_{\mathcal{G}} G|\{E, F, I\} \rangle$?

Exercice 5 – Indépendances...

La loi jointe $P(U, X, V, Y, Z)$ des 5 variables aléatoires (U, X, V, Y, Z) admet le graphe d'indépendance $\mathcal{G}$ de la figure ci-dessous :



Q 5.1 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$V \perp\!\!\!\perp \{X, Y\}$? $U \perp\!\!\!\perp \{V, X\}$? $U \perp\!\!\!\perp V|\{Y, Z\}$?

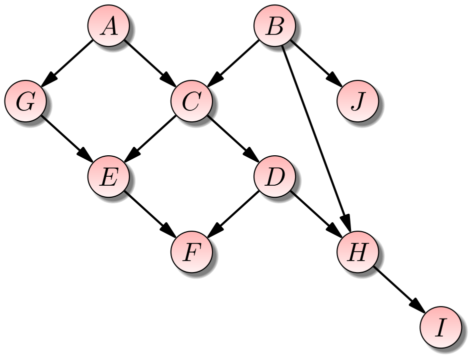
$U \perp\!\!\!\perp V|\{X, Y\}$? $U \perp\!\!\!\perp V|\{X, Y, Z\}$?

Q 5.2 L'ordre d'énumération sur les variables utilisé a été $UXVYZ$; quelles sont les relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle qui ont servi à construire le graphe ?

Comment $P(U, X, V, Y, Z)$ se décompose-t-elle ?

Exercice 6 – Indépendances bis...

Soit le réseau bayésien :



Q 6.1 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $H \perp\!\!\!\perp E$? Vous justifierez votre réponse.

Q 6.2 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $H \perp\!\!\!\perp E | C$?

Q 6.3 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $A \perp\!\!\!\perp B | I$?

Q 6.4 Est-ce que, par d-séparation, on peut déduire que $A \perp\!\!\!\perp I | D, F, H$?

Exercice 7 – Diagnostic moteur

Une pièce de moteur automobile (bielle) cassera (variable C) certainement prématurément (avant 100.000 km) si elle est défectueuse (variable D) ou s'il y a eu insuffisance d'entretien (variable I). Les 3 variables aléatoires (D, I, C) ont toutes pour valeurs $\{o(ui), n(on)\}$ et leur loi jointe est donnée par les tableaux suivants ($a, b \in]0, 1[$, $\overline{a} = 1 - a$, $\overline{b} = 1 - b$) :

$P(D = d, I = i, C = o) =$

	$I = o$	$I = n$
$D = o$	$a.b$	$a.\overline{b}$
$D = n$	$\overline{a}.b$	0

$P(D = d, I = i, C = n) =$

	$I = o$	$I = n$
$D = o$	0	0
$D = n$	0	$\overline{a}.\overline{b}$

Q 7.1 Est-ce que : $I \perp\!\!\!\perp D$? $I \perp\!\!\!\perp D | C$? Tracer le graphe du RB associé aux trois variables pour l'ordre d'énumération (D, I, C).

Q 7.2 Quelle est la probabilité pour que la rupture de la pièce soit due à ce qu'elle était défectueuse ?

Q 7.3 On apprend que l'entretien a été insuffisant. Quelle est maintenant la probabilité pour que la rupture de la pièce soit due à ce qu'elle était défectueuse ? Comparer cette probabilité avec la précédente.

Exercice 8 – Réseau bayésien

La loi jointe des 7 variables aléatoires (A, B, C, D, E, F, G) vérifie les relations d'indépendance suivantes :

$$B \perp\!\!\!\perp A \; ; \quad C \perp\!\!\!\perp \{A, B\} \; ; \quad D \perp\!\!\!\perp C | \{A, B\} \; ; \quad E \perp\!\!\!\perp \{A, D\} | \{B, C\} \; ;$$
$$F \perp\!\!\!\perp \{A, B, C\} | \{D, E\} \; ; \quad G \perp\!\!\!\perp \{A, B, C, D, E\} | F.$$

Q 8.1 Construire le graphe d'indépendance correspondant lorsque les variables sont rangées dans l'ordre A, B, C, D, E, F, G.

Q 8.2 Qu'est-ce que le critère de d-séparation permet d'affirmer concernant les propriétés suivantes :

$$A \perp\!\!\!\perp C | \{D, E\} \; ; \quad A \perp\!\!\!\perp C | \{B, D, E\} \; ; \quad A \perp\!\!\!\perp C | G \; ; \quad A \perp\!\!\!\perp C | \{B, D, E, F\}.$$