Master SID

Raisonnement dans l'incertain

TD n°2 : Probabilités

Exercice 1 – Manipulation de probabilités

Soit 2 variables aléatoires A et B de domaines respectifs $\Omega_A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $\Omega_B = \{b_1, b_2\}$. Les distributions de probabilité $P(A|B)$ et $P(B)$ sont définies par la matrice et le vecteur suivants :

$P(A|B) =$

	b_1	b_2
a_1	$0,2$	$0,4$
a_2	$0,3$	$0,4$
a_3	$0,5$	$0,2$

$P(B) =$

b_1	$0,3$
b_2	$0,7$

Calculez $P(A|B) \times P(B)$.

Exercice 2 – Anniversaire

Cette année, vous intégrez une nouvelle promotion du master, composée de 40 étudiants. Vous ne connaissez qu'une seule personne dans cette promo, un ami de longue date qui ne connaît églement personne d'autre que vous. Il est très joueur et il vous propose de parier 20 € avec vous qu'il y a au moins 2 étudiants de la promo qui sont nés le même jour. Avez-vous intérêt à faire ce pari ?

Exercice 3 – Les deux urnes

Soit deux urnes A et B emplies de boules rouges et jaunes. L'urne A contient 20 boules rouges et 30 boules jaunes ; l'urne B contient 10 boules rouges et 10 boules jaunes. On sélectionne au hasard une des deux urnes (tirage équiprobable) et, dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est rouge. Déterminez la probabilité que la boule provienne de l'urne A.

Exercice 4 – Dutch book

Un bookmaker (B) doit afficher les cotes des paris avant une course à laquelle participeront 3 chevaux. On désigne par e_i l'événement « le cheval i gagne » ($i = 1, 2, 3$). Un et un seul des e_i se réalisera.

Les parieurs peuvent parier des sommes quelconques sur un ou plusieurs des événements e_1, e_2, e_3,

$e_{1,2} = e_1 \cup e_2$, $e_{1,3} = e_1 \cup e_3$ et $e_{2,3} = e_2 \cup e_3$; ils peuvent aussi parier contre ces événements.

Parier *sur* l'événement E à la cote « k contre 1 » signifie : miser, puis recevoir du bookmaker $(k+1)$ € pour 1 € misé si E se produit et rien sinon.

Parier *contre* l'événement E à la cote « k contre 1 » signifie : recevoir du bookmaker une mise, puis lui payer $(k+1)$ € pour 1 € misé si E se produit et rien sinon.

Q 4.1 Montrer que si le bookmaker offre des cotes $k_1 = 2$ pour e_1 et également $k_{2,3} = 2$ pour $e_2 \cup e_3$, un parieur peut gagner de l'argent à coup sûr.

Q 4.2 Montrer qu'il en est de même si le bookmaker offre des cotes $k_1 = k_2 = 3$ pour e_1 comme pour e_2 et $k_{1,2} = 0.5$ pour $e_1 \cup e_2$.

Q 4.3 Le bookmaker attribue aux événements e_i des probabilités p_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$p_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3)\,;\, p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

et fixe les cotes k_i et $k_{i,j}$ de sorte que tous les paris soient *équitables*, c'est-à-dire qu'ils aient une espérance mathématique nulle.

Q 4.3.1 Quelle relation existe-t-il entre les k_i, $k_{i,j}$, d'une part, et les p_i d'autre part ?

Q 4.3.2 Montrer que, quelles que soient les quantités totales *nettes* misées x_i (x_i= quantité totale misée sur e_i moins quantité totale misée contre e_i) et $x_{i,j}$, il est impossible que le bookmaker perde de l'argent à coup sûr.

Exercice 5 – Indépendances conditionnelles

La loi de probabilité jointe de 3 variables aléatoires X, Y et Z, est donnée par le tableau suivant dans lequel, par exemple, la case 1/12 représente la probabilité $P(X = x_2, Y = y_1, Z = z_1)$:

		$Y = y_1$	$Y = y_2$	$Y = y_3$
$Z = z_1$	$X = x_1$	1/24	1/15	1/8
	$X = x_2$	1/12	7/120	1/8
		$Y = y_1$	$Y = y_2$	$Y = y_3$
$Z = z_2$	$X = x_1$	3/40	1/20	12/120
	$X = x_2$	1/20	3/40	17/120

On note respectivement « $X \perp\!\!\!\perp Y$ » et « $X \perp\!\!\!\perp Y|Z$ » l'indépendance probabiliste entre X et Y, et l'indépendance probabiliste entre X et Y conditionnellement à Z.

Q 5.1 D'un point de vue probabiliste, a-t-on $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \perp\!\!\!\perp Z$, $Z \perp\!\!\!\perp Y$? Rappel : si A et B sont indépendants, $P(A, B) = P(A) \times P(B)$.

Q 5.2 A-t-on $X \perp\!\!\!\perp Y|Z$, $X \perp\!\!\!\perp Z|Y$, $Z \perp\!\!\!\perp Y|X$?

Exercice 6 – Daltonisme bayésien

Environ 8% des hommes et 0,5% des femmes sont, à des degrés divers, daltoniens.

Q 6.1 Calculer le pourcentage de femmes parmi les daltoniens en ajoutant une hypothèse (un a priori) que vous préciserez.

Q 6.2 Construire le réseau bayésien représentant ce problème (définir ses variables aléatoires, sa structure et ses paramètres).

g **Q 6.3** Si l'on inverse le sens des arcs du réseau bayésien, quelle structure obtient-on et quels sont les paramètres associés aux nœuds ?

Exercice 7 – Jeu de dés

On lance deux dés équilibrés (non pipés) à 4 faces. Déterminer, grâce à un réseau bayésien, la loi de probabilité du maximum des chiffres indiqués par les dés.

Idée : une table de probabilité conditionnelle permet de représenter des relations fonctionnelles entre variables aléatoires telles que $S = D1 + D2 \ldots$

Exercice 8 – Quotient intellectuel

Les données statistiques indiquent que le quotient intellectuel (variable Q), le niveau d'études (variable E) et le rendement dans le travail (variable T) dans la population française peuvent être décrits par un modèle probabiliste où les 3 variables aléatoires (Q, E, T) ont toutes pour valeurs $\{h(aut), b(as)\}$ et ont une loi jointe $P(Q, E, T)$ donnée par les tableaux suivants :

$100 \times P(Q, E, T = h) =$

	$E = h$	$E = b$
$Q = h$	36	1
$Q = b$	1	4

$100 \times P(Q, E, T = b) =$

	$E = h$	$E = b$
$Q = h$	4	9
$Q = b$	9	36

Q 8.1 Est-ce que : $E \perp\!\!\!\perp Q$? $T \perp\!\!\!\perp E|Q$? $T \perp\!\!\!\perp Q|E$? Tracer le graphe du RB associé aux trois variables pour l'ordre d'énumération (Q, E, T).

Q 8.2 Quelles sont, dans cette population ,les probabilités qu'une personne ait un rendement élevé dans son travail :

- sachant qu'elle a un Q.I. élevé ?
- sachant qu'elle a un niveau d'études élevé ?
- sachant qu'elle a à la fois un Q.I. et un niveau d'études élevés ?