Master SID

Raisonnement dans l'incertain

TD n°1 : le modèle EU

Exercice 1 – Construction d'une fonction d'utilité

On suppose qu'un Décideur se comporte dans le risque conformément au critère Max EU et cherche à construire approximativement sa fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern u sur l'intervalle de gains $[0\,€,\ 10^5\,€]$.

On note $\langle(x, p), (y, q)\rangle$ la loterie donnant le gain x avec probabilité p et le gain y avec probabilité $q = 1 - p$. Des questions posées à l'agent, il ressort qu'il est indifférent :

— entre $\langle(10^5\,€, p), (0\,€, q)\rangle$ et $\langle(5 \times 10^4\,€, \frac{1}{2}), (0\,€, \frac{1}{2})\rangle$ pour $p = \frac{3}{8}$;
— entre $\langle(10^5\,€, p'), (0\,€, q')\rangle$ et $\langle(2,5 \times 10^4\,€, \frac{1}{2}), 0\,€, \frac{1}{2})\rangle$ pour $p' = \frac{1}{4}$;
— entre $\langle(10^5\,€, p''), (0\,€, q'')\rangle$ et $\langle(10^4\,€, \frac{1}{2}), (0\,€, \frac{1}{2})\rangle$ pour $p'' = \frac{1}{8}$.

Q 1.1 Sachant que l'utilité de von Neumann-Morgenstern est toujours unique à une transformation affine près, que peut-on imposer à u ?

Q 1.2 Représentez graphiquement (et approximativement) u.

Q 1.3 Lorsque la fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern est concave, l'agent est dit « adversaire du risque » parce qu'il préfère les loteries dans lesquelles il n'y a pas trop d'incertitudes. Au contraire, lorsque son utilité est convexe, l'agent a du « goût pour le risque » car il préfère les loteries incertaines. Enfin, lorsqu'elle est linéaire, on dit que l'agent est « neutre vis-à-vis du risque ». Comment qualifierait-on l'attitude vis-à-vis du risque de l'agent ?

Q 1.4 Pour vérifier la fonction u trouvée, on cherche l'équivalent-certain de la loterie $L = \langle(5 \times 10^4\,€, \frac{1}{2}), (10^4\,€, \frac{1}{2})\rangle$, autrement dit la conséquence x pour laquelle l'agent est indifférent entre $\langle(x, 1)\rangle$ et L. Que s'attend-on à trouver ?

Exercice 2 – L'assurance d'avoir la pêche

Le Décideur (un patron-pêcheur) a la possibilité d'assurer son bateau, valant 100 k€ (milliers d'euros) et constituant sa fortune initiale, contre :

— une panne (événement A_1), de probabilité $p_1 = 1/10$, de coût 10 k€ ;
— un naufrage (événement A_2), de probabilité $p_2 = 1/100$, de coût 100 k€.

A_1, A_2 et $A_3 = (A_1 \cup A_2)^c$ forment une partition. Le décideur a pour critère EU, avec pour utilité de vNM $u(.)$ la fonction :

$$x \longmapsto u(x) = \begin{cases} 100(x-75) & \text{pour } x \geq 75 \\ 200(x-75) & \text{pour } x < 75 \end{cases}$$

où x est son état de fortune (exprimé en k€). Il a le choix entre :

- ne pas s'assurer (décision δ) ;
- s'assurer complètement avec une franchise de 5 k€ (décision d_1) [l'assurance rembourse le coût du sinistre moins la franchise] ;
- s'assurer à 70% (décision d_2) [l'assurance ne rembourse que 70% du coût du sinistre].

S'il s'assure, il doit payer une prime d'assurance c_1 pour d_1 et c_2 pour d_2.

Q 2.1 L'assureur fixe les montants des primes de façon que son espérance mathématique de gain soit nulle (c'est ce que l'on appelle la *valeur actuarielle*). Calculez c_1 et c_2.

Q 2.2 Quelle est l'attitude vis-à-vis du risque du Décideur ? Que préfère-t-il entre les décisions δ, d_1 et d_2 ?

Q 2.3 On se place désormais dans l'hypothèse suivante : le Décideur pense que si l'assureur a à lui rembourser une somme supérieure à 5 k€, il y a une probabilité 1/2 qu'il lui rembourse bien toute cette somme et une probabilité 1/2 qu'il ne soit pas solvable et ne lui rembourse que 5 k€.

Q 2.3.1 Quelle est maintenant la meilleure décision ?

Q 2.3.2 Le pêcheur est-il prêt à payer, avant de prendre sa décision, 1 k€ à un expert capable de lui dire, immédiatement et avec certitude, si l'assureur est solvable ? (On construira l'arbre de décision correspondant à ce problème).

Exercice 3 – L'écran total

Un détaillant en ordinateurs (le décideur) peut acheter (décision A) ou non (décision $\overline{A}$) à un grossiste un lot d'écrans qui peut se révéler, après achat :

- soit être de bonne qualité (événement B), auquel cas la revente du lot lui rapportera un bénéfice net de 150 unités (milliers d'euros),
- soit être de mauvaise qualité (événement M), auquel cas il subira une perte nette de 200 unités.

Le détaillant accorde aux événements B et M les probabilités a priori :

$$P(B) = 0,6 \qquad \text{et} \qquad P(M) = 0,4.$$

Il a la possibilité de tester les marchandises avant achat. Le test, qui conclura b = « B vrai » ou m = « M vrai » n'est pas sûr. Le décideur accorde aux réponses possibles les probabilités :

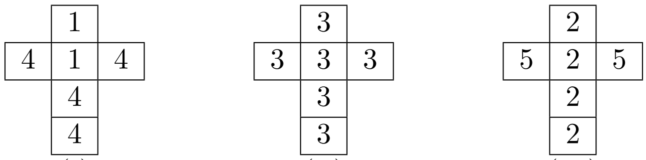
$$P(b|B) = 0,8 \qquad P(m|B) = 0,2 \qquad P(b|M) = 0,1 \qquad P(m|M) = 0,9.$$

Le coût du test est de 10 unités. Le décideur se comporte dans le risque conformément au critère du maximum d'espérance d'utilité et son utilité de vNM est une fonction $u(\cdot)$ de ses gains nets.

Tracez l'arbre de décision du problème, en indiquant (après calcul) toutes les probabilités.

Exercice 4 – Dés de Gardner (1974)

On vous propose de jouer au jeu suivant. Tout d'abord, pour participer au jeu, vous devez donner au maître du jeu 20€. Ensuite, vous choisissez le dé que vous préférez parmi les trois ci-dessous. Le maître du jeu en choisit un parmi les deux qui restent. Chacun d'entre vous lance son dé. Celui qui a le dé le plus élevé gagne 30 €, l'autre ne gagne rien.



(i) (ii) (iii)

Q 4.1 Quel dé devez-vous choisir ?

Q 4.2 Avez-vous intérêt à accepter de jouer à ce jeu ?

Exercice 5 – Poole, Mackworth, Goebel (1998)

On s'intéresse à un robot qui doit livrer des colis dans une entreprise. Pour se rendre dans le bureau 203, il peut prendre deux trajets différentes :

- Le premier trajet passe par un escalier, suivi d'un trajet très court. Dans les escaliers, le robot risque de glisser et de tomber. Il est possible de doter le robot de protections, qui ne vont pas modifier sa probabilité de tomber, mais qui vont atténuer ses dommages en cas de chute. Malheureusement, ces protections rajoutent un poids non négligeable au robot.
- Le deuxième trajet est plus long mais il ne passe par aucun escalier et évite donc toute chute.

Q 5.1 Quelles sont les différentes décisions possibles pour le robot. Quelles utilités doivent être élicitées (apprises) et quelles probabilités doivent être estimées ?

Q 5.2 Tracer un arbre de décision pour ce problème.