



Algorithmique

TD n°1 : complexité

Exercice 1 – Notation de Landau

Démontrez les assertions suivantes :

1. $n^4 \in O(10^{-2}n^4 + 7n)$
2. $n^5 \notin O(10^3n^4)$
3. $n^5 \in \Omega(10^3n^4)$
4. $7n^5 + 18n^4 + 1000 \in \Theta(n^5)$
5. pour toutes fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$, si $f(\cdot) \in (g(\cdot))$ alors $(f(\cdot) + g(\cdot)) \in O(g(\cdot))$
6. pour toutes fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$, $O(f(\cdot) + g(\cdot)) = O(\max(f(\cdot), g(\cdot)))$

Exercice 2 – Complexité d'une fonction

Q 2.1 Calculez la complexité dans le pire cas de l'algorithme ci-dessous :

```
1 fonction f1 (n, m) :  
2   i ← 1  
3   j ← 1  
4   tant que i ≤ m et j ≤ n faire  
5     i ← i + 1  
6     j ← j + 1  
7   fait
```

Q 2.2 Faites de même avec la complexité dans le meilleur cas et en moyenne.

Q 2.3 Calculez la complexité dans le pire cas de l'algorithme ci-dessous :

```
1 fonction f2 (n, m) :  
2   i ← 1  
3   j ← 1  
4   tant que i ≤ m ou j ≤ n faire  
5     i ← i + 1  
6     j ← j + 1  
7   fait
```

Q 2.4 Calculez la complexité dans le pire cas de l'algorithme ci-dessous :

```
1 fonction f3 (n, m) :
2   i ← 1
3   j ← 1
4   tant que i ≤ m faire
5     i ← i + 1
6   fait
7   tant que j ≤ n faire
8     j ← j + 1
9   fait
```

Q 2.5 Calculez la complexité dans le pire cas de l'algorithme ci-dessous :

```
1 fonction f4 (n, m) :
2   i ← 1
3   j ← 1
4   tant que i ≤ m faire
5     si j ≤ m faire
6       i ← i + 1
7     sinon
8       j ← j + 1
9     i ← 1
10  finsi
11  fait
```

Exercice 3 – Fonction mystère

Soit la fonction suivante :

```
1 fonction f (n) :
2   si n = 0 alors
3     retourner 2
4   sinon
5     retourner f(n-1) * f(n-1)
6   finsi
```

Q 3.1 Que fait cette fonction ?

Q 3.2 Quelle est la complexité de f ?

Q 3.3 Réécrivez la fonction f de manière itérative.

Q 3.4 Quelle est la complexité de votre nouvelle fonction ?

Exercice 4 – Fonction mystère – le retour

Soit la fonction suivante :

```
1 fonction f (a, b) :
2   p ← 0
3   c ← 0
4   tant que c < a faire
5     p ← p + b
6     c ← c + 1
7   fait
8   retourner p
```

Q 4.1 Que fait cette fonction ?

Q 4.2 Quelle est la complexité de f ?

Exercice 5 – Multiplication à la russe

```
1 fonction multRusse (a,b) :
2   prod ← 0
3   x ← a
4   y ← b
5   tant que y ≠ 0 faire
6     si y est impair alors
7       prod ← prod + x
8       y ← y - 1
9     finsi
10    x ← 2 × x
11    y ← y/2
12  fait
13  retourner prod
```

Q 5.1 Donnez la trace de l'algorithme (valeurs de x, y et prod) quand a = 4 et b = 11.

Q 5.2 Démontrez que la propriété suivante est un invariant de boucle :

« À la fin de la ième itération, $\text{prod} + x \times y = a \times b$ ».

Q 5.3 Quelle est la complexité de cet algorithme ?