Cours n° 9 : les tables de hachage

Christophe Gonzales

POLYTECH MARSEILLE Aix-Marseille Université

HUGO3 — Algorithmique

Problématique des tables de hachage (1/2)

Problématique

structure pour effectuer rapidement :

- l'insertion
- la recherche
- la suppression

d'informations dans 1 ensemble géré dynamiquement

Exemples : dictionnaire, compilateur

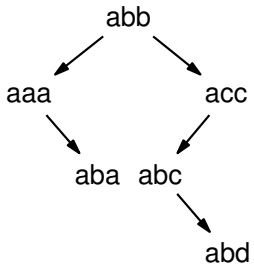
$\Longrightarrow$ { on ne connaît pas le nombre d'éléments *a priori*
on doit accéder rapidement aux éléments

Problématique des tables de hachage (2/2)

- **Exemple d'un compilateur :**

```
aaa = 3;
aba = 4;
abb = 5;
abc = aaa + 2;
abd = aaa + 3;
acc = abc + abd;
```

- **Stockage des variables par arbre binaire :**

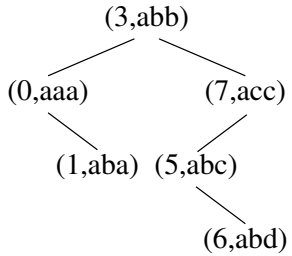


$\Longrightarrow$ trop de comparaisons

Solution : table de hachage (1/3)

Principe des tables de hachage

- on associe à chaque information à stocker une clé
- on recherche les informations via leur clé



(0,aaa)	(1,aba)		(3,abb)		(5,abc)	(6,abd)	(7,acc)

```
typedef struct {
  int     cle;
  data_t donnee;
} bucket_t;
```

Solution : table de hachage (2/3)

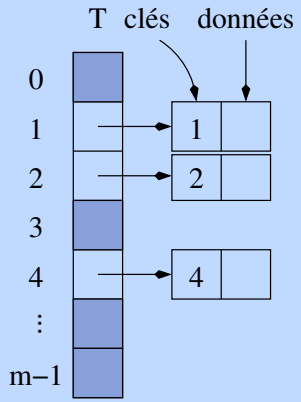
Tables à adressage direct

- U : l'univers des clés
- $U = \{0, 1, ..., m-1\}$
- Toutes les données ont des clés différentes

```
bucket_t* tab[m];

data_t search(tab, cle) {
  if (tab[cle] == NULL)
    throw std::exception ();
  return tab[cle]->donnee;
}

void insert(tab, donnee) {
  int cle = get_cle(donnee);
  bucket_t* bucket = (bucket_t*)
    malloc (sizeof(bucket_t));
  if (bucket == NULL)
    throw std::exception ();
  bucket->cle = cle;
  bucket->donnee = donnee;
  tab[cle] = bucket;
}
```



Solution : table de hachage (3/3)

Problèmes des tables à adressage direct :

1. $U \neq \{0, 1, ..., m-1\}$ ou, pire, U n'est pas un ensemble d'entiers positifs
2. $|U|$ est très grand $\Longrightarrow$ t trop grand pour être stocké en mémoire
3. plusieurs données ont la même clé

Solutions :

1. créer une fonction `hash` : $U \mapsto \{0, 1, ..., m-1\}$
2. si tout l'univers des clés est utilisé, pas de solution
   sinon : soit K l'ensemble des clés réellement utilisées ($|K| << |U|$). créer une fonction `hash` : $U \mapsto \{0, 1, ..., |K|-1\}$ $\Longrightarrow$ table de hachage
3. *collisions* dans une table de hachage. Solutions dans les transparents suivants

Tables de hachage (1/2)

Définition d'une table de hash

- Tableau (comme pour l'adressage direct)
- mais au lieu de stocker l'élément de clé k à l'indice k : on le stocke à l'indice $h(k)$, où h est une **fonction de hachage** : $U \mapsto \{0, 1, ..., m-1\}$.
- $|U|$ est souvent beaucoup plus grand que m.

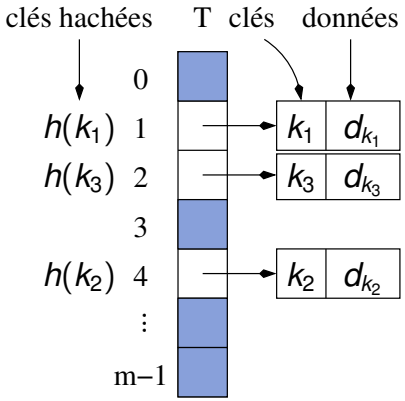
$\Longrightarrow$ répond aux points 1 et 2

Exemples :

- Annuaire téléphonique :
  clé = nom des personnes, donnée = numéro de téléphone
- Nom des variables dans un compilateur :
  clé = nom de la variable, donnée = adresse en mémoire
- Gestion d'un ensemble de voitures :
  clé = numéro d'immatriculation, donnée = données sur la voiture

Tables de hachage (2/2)

donnée	clé	clé hachée
d_{k_1}	k_1	$h(k_1) = 1$
d_{k_2}	k_2	$h(k_2) = 4$
d_{k_3}	k_3	$h(k_3) = 2$



Problèmes des tables de hachage

- **Comment choisir la fonction h ?**
  - le calcul de $h(k)$ doit être rapide
  - h doit éviter au maximum les collisions
- **Que faire quand il y a collision ?** ($h(k_1) = h(k_2)$ pour $k_1 \neq k_2$)
  - résolution par chaînage
  - résolution par adressage ouvert

problème des collisions

soit $h(k) = 0 \; \forall k \in U \Longrightarrow$ collision pour tout $k_1 \neq k_2$

soit $h(k) = k \; \forall k \in U \Longrightarrow$ moins de collisions

$\Longrightarrow$ le choix de h permet d'éviter des collisions

Propriété : Il est impossible d'éviter totalement les collisions

table de hachage : stocke des données ayant $|U|$ clés possibles dans une table de longueur $m << |U| \Longrightarrow$ il n'y a pas bijection entre U et $\{0, 1, ..., m-1\}$

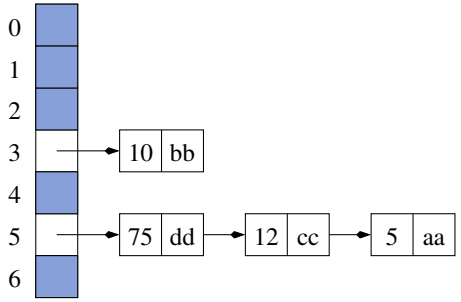
Résolution par chaînage

Principe

Chaque élément de la table est une liste chaînée et tous les éléments ayant la même clé hachée sont dans la même liste chaînée.

Exemple :

- $h(k) = k \bmod 7$
- « aa » $\Rightarrow k = 5 \Rightarrow h(k) = 5$
- « bb » $\Rightarrow k = 10 \Rightarrow h(k) = 3$
- « cc » $\Rightarrow k = 12 \Rightarrow h(k) = 5$
- « dd » $\Rightarrow k = 75 \Rightarrow h(k) = 5$



$\Longrightarrow$ nécessité de stocker les clés dans la liste chaînée

Analyse de la résolution par chaînage (1/4)

Hypothèse : le calcul de $h(k)$ s'effectue en O(1)

Analyse de l'insertion d'un élément

- calcul de $h(k)$ = O(1)
- insertion dans la liste chaînée appropriée : O(1)

Résultat : insertion en O(1)

Analyse de la suppression d'un élément

si la liste est doublement chaînée : suppression d'un élément en O(1)

Analyse de la résolution par chaînage (2/4)

Supposons que la table t soit de taille m et contienne n éléments

Analyse de la recherche d'un élément

Dans le pire des cas, tous les éléments de la table appartiennent à la même liste chaînée $\Rightarrow$ recherche en $\Theta(n)$.

$\Longrightarrow$ Les tables de hachage sont moins performantes que les listes chaînées dans le pire des cas

facteur de charge

Le facteur de charge d'une table de hachage : $\alpha = n/m$.

Hypothèse (hachage uniforme simple) : chaque liste de la table a la même chance de recevoir un élément tiré au hasard

Analyse de la résolution par chaînage (3/4)

Recherche d'un élément n'appartenant pas à la table

Sous l'hypothèse de hachage uniforme simple, la recherche d'un élément n'appartenant pas à la table est en $\Theta(1+\alpha)$ en moyenne.

Démonstration : Sous l'hypothèse de hachage uniforme simple, $h(k)$ a une chance égale de correspondre à n'importe quelle liste de la table.

Donc le temps moyen pour la recherche d'une clé k est le temps moyen pour arriver à la fin d'une des listes chaînées.

La longueur moyenne d'une liste est α. Donc la recherche s'effectue en 1 (calcul de $h(k)$) $+ \alpha$.

Analyse de la résolution par chaînage (4/4)

Recherche d'un élément appartenant à la table

Sous l'hypothèse de hachage uniforme simple, la recherche d'un élément appartenant à la table est en $\Theta(1+\alpha)$ en moyenne.

Démonstration : Hypothèse de hachage uniforme simple $\Longrightarrow$ la longueur moyenne des listes après insertion de $i-1$ éléments est $(i-1)/m$. Supposons que les éléments sont insérés à la fin des listes. Le nombre moyen d'éléments examinés pendant la recherche du $i$ème élément inséré est 1 + le nombre d'éléments de la liste avant d'insérer cet élément = $1 + (i-1)/m$
$\Longrightarrow$ Celui de la recherche d'un elt quelconque est en moyenne :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-1}{m}\right) = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2m}.$$

Donc la recherche est en $\Theta(2 + \alpha/2 - 1/2m) = \Theta(1+\alpha)$.

Conclusions

Conclusions des analyses

Si le nombre de cases du tableau est au moins proportionnel au nombre d'éléments à stocker, $\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$.

- l'ajout d'éléments est en O(1)
- la suppression est en O(1) si les listes sont doublement chaînées
- la recherche d'éléments est en O(1)

Choix des fonctions de hachage (1/2)

Problème : qu'est-ce qu'une bonne fonction de hachage ?

une fonction :

- qui se calcule rapidement (en O(1))
- qui minimise les collisions autant que possible

Minimisation des collisions = hachage uniforme simple

$$\sum_{k:h(k)=i} P(k) = \frac{1}{m} \quad \forall i \in \{0, ..., m-1\}$$

P connue $\Longrightarrow$ on peut trouver h qui minimise les collisions

En pratique P est inconnue $\Longrightarrow$ on utilise des heuristiques

Choix des fonctions de hachage (2/2)

Principe des fonctions de hachage usuelles

1. transformer la clé k en un entier via une fonction $f : U \mapsto \mathbb{N}$
2. transformer cet entier en un entier entre 0 et $m-1$ via une fonction $g : \mathbb{N} \mapsto \{0, ..., m-1\}$

Autrement dit, $h(k) = g \circ f(k)$.

Exemple : fonction `f` pour hacher des chaînes de caractères

```
#define Beta 19

int f(char str[]) {
  int hash_accu = 0;
  while ( *str != '\0') {
    hash_accu = hash_accu * Beta + *str;
    str++;
  }
  return hash_accu;
}
```


Hachage par division

Définition

$g(x) = x \bmod m$

Choix de m

- éviter les collisions $\Longrightarrow$ utiliser dans g tous les bits de x
  $\Longrightarrow$ éviter les puissances de 2
- « bon choix » : nombre premier pas trop proche d'une puissance de 2

Hachage par multiplication

Définition

- $g(x) = \lfloor m(xA - \lfloor xA \rfloor) \rfloor$, où $A \in]0, 1[$.
- Avantage par rapport au hachage par division : choix de m non critique

Choix de A

Knuth propose d'utiliser le nombre d'or (-1) : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Propriété : pour tout A irrationnel, $g(x), g(x+1), ..., g(x+k)$ sont éloignés les uns des autres et $g(x+k+1)$ appartient au plus grand des segments $[g(x+i), g(x+i+1)]$.

Hachage universel (1/3)

But : éviter qu'un utilisateur mal intentionné ne choisisse que des clés ayant la même valeur hachée

Principe : choisir la fonction g au hasard indépendamment des clés lors de chaque exécution du programme

$\Longrightarrow$ la vitesse change à chaque exécution mais en moyenne accès en O(1)

Hachage universel (2/3)

Ensemble universel

- Soit $\mathcal{H}$ un ensemble fini de fonctions de hachage de $U \mapsto \{1, ..., m-1\}$.
- $\mathcal{H}$ est universel si $\forall\ k_1, k_2 \in U$ tels que $k_1 \neq k_2$, $|\{h \in \mathcal{H} : h(k_1) = h(k_2)\}| = |\mathcal{H}|/m$

$\Longrightarrow$ pour une fonction $h \in \mathcal{H}$ donnée, la probabilité de collision entre 2 clés est de $1/m$

Théorème

Si h est choisie dans un ensemble universel et est utilisée pour hacher n clés dans une table de taille m, avec $n \leq m$, alors l'espérance du nombre de collisions avec une clé k donnée est inférieure strictement à 1.

Hachage universel (3/3)

Choix d'un ensemble universel

- On suppose que m est un nombre premier
- On définit un mot comme tout ensemble de nombres entiers de 0 à p, avec $p < m$
- On décompose une clé $k \in U$ en une séquence de $r+1$ mots : $k = \langle k_0, k_1, ..., k_r \rangle$
- On note $a = \langle a_0, a_1, ..., a_r \rangle$ une séquence où les a_i sont choisis au hasard dans $\{0, ..., m-1\}$
- On définit $\mathcal{H} = \bigcup_a \{h_a\}$ avec

$$h_a(k) = \sum_{i=0}^{r} a_i k_i \bmod m.$$

- Alors $\mathcal{H}$ est un ensemble universel.

adressage ouvert (1/2)

Constat : la résolution par chaînage peut être coûteuse à cause des pointeurs des listes chaînées

Peut-on éviter les pointeurs ?

Oui : en stockant directement les éléments dans la table et non dans des listes chaînées

Avantage : utilise moins de place que la résolution par chaînage $\Longrightarrow$ on peut utiliser des tables plus grandes

Problème : gestion des collisions

adressage ouvert (2/2)

Principe

- Pour effectuer une insertion, on scanne la table jusqu'à ce que l'on trouve une case vide dans laquelle insérer l'élément.
- La séquence de cases scannées dépend de la clé de l'élément à insérer.

fonction de hachage

$$h : U \times \{0, ..., m-1\} \mapsto \{0, ..., m-1\}$$

Séquence de scans : $\langle h(k,0), h(k,1), ..., h(k,m-1) \rangle$

$\Longrightarrow$ $\langle h(k,0), h(k,1), ..., h(k,m-1) \rangle$ doit être une permutation de $\{0, ..., m-1\}$

Exemple d'insertion

```
void hash_insert(bucket_t hashtable[],
                 int m,
                 char elt[]) {
  // hachage de elt
  int k = get_cle(elt);

  // on essaye tous les h(k,i)
  // jusqu'à ce qu'une case de
  // hashtable soit vide
  for (int i = 0; i<m; i++) {
    int j = h(k,i);
    if (hashtable[j].cle == -1) {
      // ici, on a trouvé une case vide
      hashtable[j].cle = k;
      hashtable[j].donnee = str;
      return;
    }
  }
  throw std::exception ();
}
```

0	8	dd
1		
2	3	aa
3	12	cc
4		
5	11	bb
6		
7		

x = "dd", $k = 8$
$h(k,3) = 0$

$$h(k,i) = \left(\left\lfloor 8 \times \left(\frac{\pi k}{4} - \left\lfloor \frac{\pi k}{4} \right\rfloor \right) \right\rfloor + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{2} \right) \bmod 8$$

Recherche d'éléments

```
data_t hash_search(bucket_t hashtable[],
                   int m,
                   int cle) {
  // on essaye tous les h(k,i) jusqu'à ce qu'on
  // trouve l'élément que l'on recherche
  for (int i = 0; i<m; i++) {
    int j = h(cle,i);
    // si on rencontre une case vide, c'est que
    // l'élément n'est pas dans la table
    if (hashtable[j].cle == -1)
      throw std::exception ();

    // si la cle de la case est cle, on
    // a trouvé l'élément qu'on cherchait
    if (hashtable[j].cle == cle) {
      return hashtable[j].donnee;
    }
  }

  // on a parcouru la table sans trouver
  // l'élément qu'on cherchait
  throw std::exception ();
}
```


Suppression d'éléments

- Suppression $\Longrightarrow$ « clé = -1 » pour indiquer une case vide ne suffit plus

$\Longrightarrow$ on définit « clé = -2 » pour indiquer une case qui a été affectée puis supprimée

$\Longrightarrow$ elle est libre pour des insertions
elle compte comme case « non vide » pour les recherches

- Malheureusement les analyses de complexité ne dépendent plus seulement du facteur de charge α

$\Longrightarrow$ en principe, on utilise plutôt la résolution par chaînage

Analyse de l'adressage ouvert (1/2)

Hypothèse (hachage uniforme) : chaque clé a une chance égale d'avoir n'importe laquelle des $m!$ permutations de $\{0, ..., m-1\}$ comme séquence de scans

En pratique cette hypothèse n'est jamais vérifiée, on n'en a que des approximations

Analyse d'une recherche infructueuse

Soit une table de hachage dans laquelle aucune suppression n'est permise. Soit $\alpha = n/m < 1$ le facteur de charge de la table. Alors l'espérance du nombre de scans lors de la recherche infructueuse d'un élément est au plus de $1/(1-\alpha)$.

α	50%	80%	90%	99%
scans	2	5	10	100

Analyse de l'adressage ouvert (2/2)

Analyse d'une recherche couronnée de succès

Si $\alpha < 1$ alors l'espérance du nombre de scans pour trouver l'élément recherché est au plus de :

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}.$$

α	50%	80%	90%	99%
scans	3,396	3,26	3,67	5,66

Analyse d'une insertion

Si $\alpha < 1$ alors l'espérance du nombre de scans nécessaires à l'insertion d'un élément est au plus de $1/(1-\alpha)$.

fonctions de hachage (1/2)

Probing linéaire

$h(k,i) = (h'(k) + i) \bmod m$, où $h' : U \mapsto \{0, ..., m-1\}$.

Problème : formation de clusters de cases remplies
$\Longrightarrow$ les scans peuvent être longs

Probing quadratique

$h(k,i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$, où $h' : U \mapsto \{0, ..., m-1\}$.

Problème : 2 clés k_1, k_2 telles que $h'(k_1) = h'(k_2)$ auront la même séquence de scans

fonctions de hachage (2/2)

double hachage

$h(k,i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$, où h_1 et h_2 sont des fonctions de hachage de $U \mapsto \{0, ..., m-1\}$.

Propriété : le double hachage approche l'hypothèse de hachage uniforme.

Le double hachage est plus performant que les 2 autres fonctions de hachage

Synthèse des tables de hachage

Opération	Complexité	Intérêt
Insertion d'un élément	O(1)	✔
Suppression d'un élément	O(1)	✔
Accéder à un élément donné	O(1)	✔
Accéder à l'élément le plus petit	O(n)	✖
Accéder à l'élément le plus grand	O(n)	✖
Chercher si un élément existe	O(1)	✔