Cours n° 7 : les arbres et leurs parcours

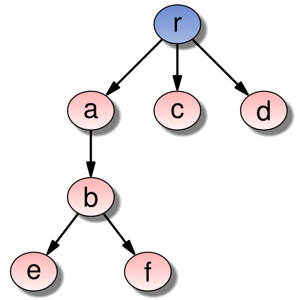
Christophe Gonzales

POLYTECH MARSEILLE Aix-Marseille Université HUGO3 — Algorithmique

Arbre

Arbre

- Ensemble fini A d'éléments, liés entre eux par une relation, dite de "parenté", vérifiant ces propriétés :
  - "x est le parent de y" ou "y est le fils de x"
  - Il existe un unique élément r (**racine**) de A sans parent
  - À part r, tout élément de A possède un **unique** parent



- Éléments de A = **nœuds**
- Nœuds sans fils = **feuilles** ou **nœuds terminaux**
- Les descendants d'un nœud x forment le **sous-arbre** de racine (ou issu de) x
- Un arbre ***n*-aire** est un arbre dont les nœuds ont tous au plus n fils.

Arbre binaire

Arbre binaire

- C'est un arbre 2-aire.
- Fils nommés : fils **gauche** et fils **droit**.

  On confond souvent le fils et le sous-arbre issu du fils.

Arbre binaire - définition récursive

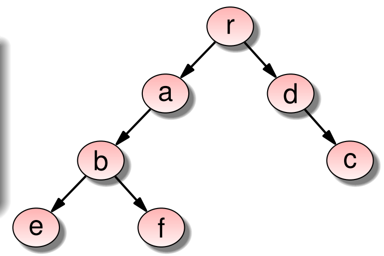
Un arbre binaire A est défini par :

- L'arbre vide ($\emptyset$) est un arbre binaire
- l'arbre de racine r, de fils gauche A_g et de fils droit A_d est un arbre binaire si :
  - A_g et A_d sont des arbres binaires.

Représentation d'un arbre binaire

```c
// structure pour définir les noeuds du graphe
typedef struct node {
  char label;
  struct node* fils_gauche;
  struct node* fils_droit;
} node_t;
```

```c
node_t e = {'e', NULL, NULL};
node_t f = {'f', NULL, NULL};
node_t b = {'b', &e, &f};
node_t a = {'a', &b, NULL};
node_t c = {'c', NULL, NULL};
node_t d = {'d', NULL, &c};
node_t r = {'r', &a, &d};
```



Arbre binaire

```c
typedef node_t* bintree_t;
```

$\Longrightarrow$ permet d'avoir des arbres vides (NULL)

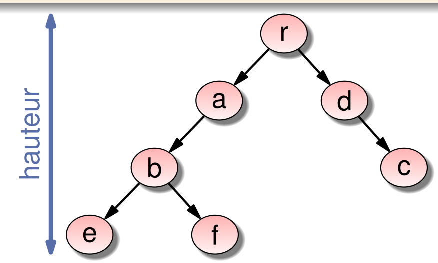
Fonctions simples

```
// renvoie le label de la racine
char label (bintree_t tree) {
  // si l'arbre est vide, c'est une erreur
  if (tree == NULL) throw std::exception ();
  return tree->label;
}

// renvoie le fils gauche
bintree_t fils_gauche (bintree_t tree) {
  if (tree == NULL) throw std::exception ();
  return tree->fils_gauche;
}

// renvoie le fils droit
bintree_t fils_droit (bintree_t tree) {
  if (tree == NULL) throw std::exception ();
  return tree->fils_droit;
}

// renvoie le nombre de noeuds de l'arbre
int nb_noeuds (bintree_t tree) {
  if (tree == NULL) return 0;
  return 1 + nb_noeuds (tree->fils_gauche)
           + nb_noeuds (tree->fils_droit);
}
```


Calcul de la hauteur d'un arbre

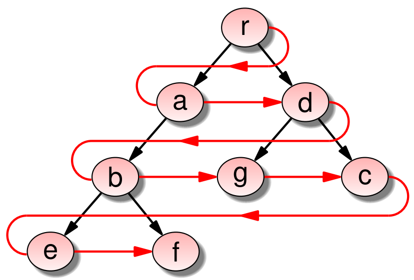
$$\text{hauteur } h(A) = \begin{cases} -1 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 + max(h(A_g), h(A_d)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

```
int hauteur (bintree_t tree) {
  if (tree == NULL) return -1;

  int hauteur_gauche = hauteur (tree->fils_gauche);
  int hauteur_droite = hauteur (tree->fils_droit);

  if (hauteur_gauche >= hauteur_droite)
    return 1 + hauteur_gauche;
  else
    return 1 + hauteur_droite;
}
```



Parcours en largeur (1/2)

- **But : parcourir les nœuds selon le tracé rouge**
  $\Longrightarrow$ parcours niveau par niveau...

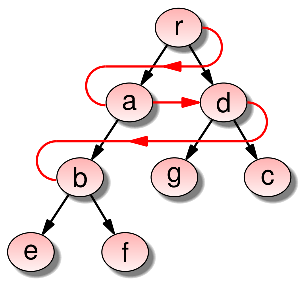


- parcourir *r*
- puis les fils *a* et *d* de *r*
- puis le fils *b* de *a* (1er fils de *r*)
- puis les fils *g* et *c* de *d* (dernier fils de *r*)
- puis les fils *e* et *f* de *b* (1er fils de *a*)

Parcours en largeur (2/2)

Utiliser une file !

```
void parcours_largeur (node_t* tree) {
  if (tree == NULL) return;

  fifo_t file = create ();
  push (&file, tree);

  while (! empty(&file)) {
    node_t* noeud = pop(&file);
    printf ("%c ", noeud->label);
    if (noeud->fils_gauche != NULL)
      push(&file, noeud->fils_gauche);
    if (noeud->fils_droit != NULL)
      push(&file, noeud->fils_droit);
  }
  printf ("\n");
}
```

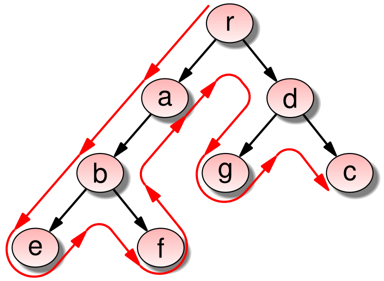


file = | g | c | e | f | nœud = b

affichage :

Parcours en profondeur

- **But : parcourir les nœuds selon le tracé rouge**
  $\Longrightarrow$ parcours en descendant dès qu'on peut…



$\Longrightarrow$ affichage : r a b e f d g c

```
void parcours_profondeur (bintree_t tree) {
  if (tree == NULL) return;

  printf ("%c ", tree->label);

  parcours_profondeur (tree->fils_gauche);
  parcours_profondeur (tree->fils_droit);
}
```


Dictionnaire (au sens informatique)

Définition d'un dictionnaire (au sens informatique)

Dictionnaire $=$ ensemble de couples `clé/valeur`où

- Les `clés` forment un ensemble **totalement ordonné** ;
- Chaque `valeur` est associée à une unique `clé` ;
- Chaque `clé` caractérise une unique `valeur`.

- **Un dictionnaire sert à représenter :**
  - des dictionnaires (au sens littéraire)
  - des listes de contacts
  - des bases de données triées par un identifiant
  - *etc.*

Représentation d'un dictionnaire

- **Problème** : comment représenter un dictionnaire ?
  - un tableau trié ?
    - On peut retrouver en O(log n) une clé (par dichotomie).
    - Mais insertion et suppression $\Longrightarrow$ décalages $\Longrightarrow$ O(n).
  - une liste triée ?
    - Recherche trop lente : O(n).
  - une pile ou une file ?
    - Recherche trop lente : O(n).
- **Nouvelle proposition** : Arbre Binaire de Recherche (ABR)

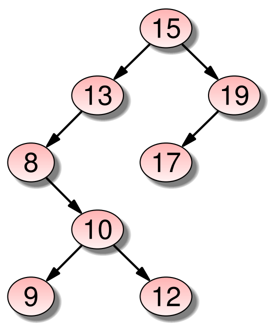
Définition d'un ABR

- **Notation :** $c(x) =$ clé du nœud x.
- Pour simplifier, on assimilera la valeur à sa clé.

Définition d'un arbre binaire de recherche

Un Arbre Binaire de Recherche est :

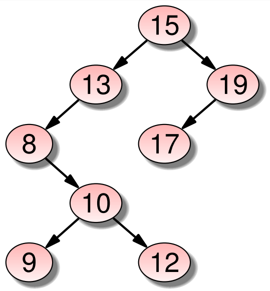
- un arbre binaire A
- $\forall x \in A, \forall y \in A_g(x), \forall z \in A_d(x), c(y) < c(x) < c(z)$




```
void parcours_infixe (bintree_t tree) {
  if (tree == NULL) return;

  parcours_infixe (tree->fils_gauche);
  printf ("%d ", tree->label);
  parcours_infixe (tree->fils_droit);
}
```

Affichage : 8 9 10 12 13 15 17 19

Recherche du plus petit/plus grand élément

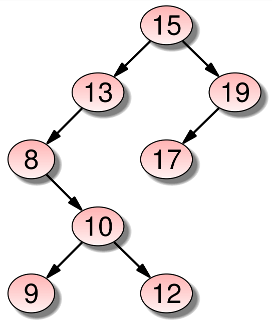


- Plus petite clé :
  dans le nœud le « plus à gauche »
  Décalage vers la droite $\Longrightarrow$ augmentation de la clé
- Plus grande clé :
  dans le nœud le « plus à droite »
  Décalage vers la gauche $\Longrightarrow$ diminution de la clé

```
int get_min (bintree_t tree) {
  // si l'arbre est vide, c'est une erreur
  if (tree == NULL) throw std::exception ();
  if (tree->fils_gauche == NULL) return tree->label;
  else return get_min(tree->fils_gauche);
}
```

```
int get_max (bintree_t tree) {
  // arbre vide = erreur
  if (tree == NULL) throw std::exception ();
  if (tree->fils_droit == NULL) return tree->label;
  else return get_max(tree->fils_droit);
}
```


Rechercher si un élément existe

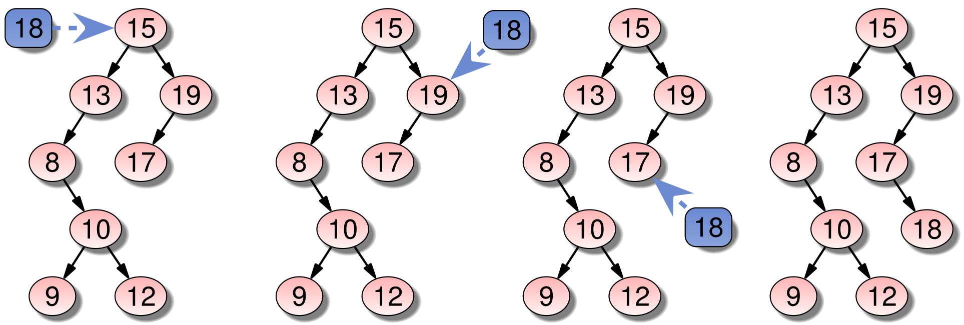


Idée de l'algorithme :

- Si la clé de la racine = l'élément, on l'a trouvé.
- Sinon, il est $>$ ou $<$.
- Clé de la racine $>$ l'élément $\Longrightarrow$ l'élément ne peut se trouver que dans le sous-arbre gauche.
- Clé de la racine $<$ l'élément $\Longrightarrow$ l'élément ne peut se trouver que dans le sous-arbre droit.

```
bool existe_elt (bintree_t tree, int clef) {
  if (tree == NULL) return false;

  if (tree->label == clef) return true;

  if (tree->label > clef)
    return existe_elt(tree->fils_gauche, clef);
  else
    return existe_elt(tree->fils_droit, clef);
}
```


Insertion d'un nouvel élément




```
bintree_t insert (bintree_t tree, int elt) {
  if (tree == NULL) return new_node(elt);
  if (tree->label > elt)
    tree->fils_gauche = insert (tree->fils_gauche, elt);
  else if (tree->label < elt)
    tree->fils_droit = insert (tree->fils_droit, elt);
  return tree;
}
```

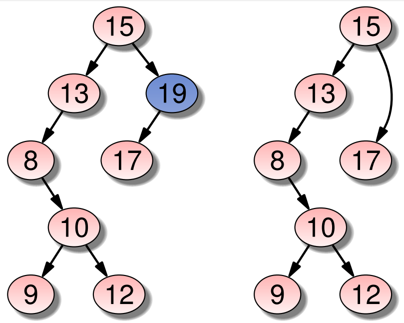
⚠ ABR vide $\Longrightarrow$ la racine de l'arbre peut changer !

Création d'un nouveau nœud

- En principe, nœuds créés « à la volée »
  $\Longrightarrow$ allocation dynamique

```
node_t* new_node (int elt) {
  // allocation
  node_t* node = (node_t*) malloc (sizeof(node_t));
  if (node == NULL) throw std::exception ();

  // remplissage des champs du noeud
  node->label = elt;
  node->fils_gauche = NULL;
  node->fils_droit  = NULL;

  return node;
}
```

Suppression de l'élément max



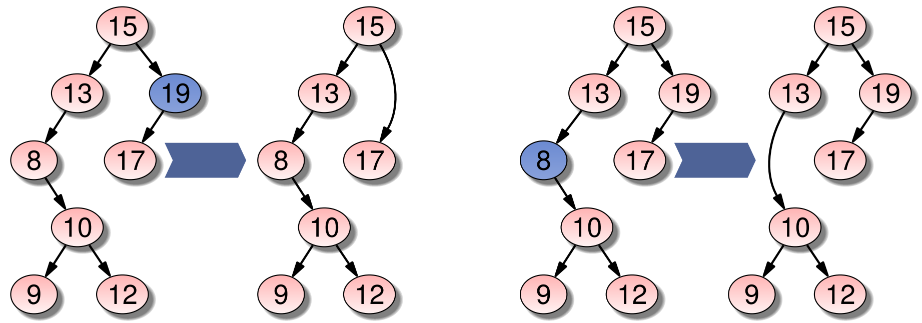
L'élément max ne peut avoir de sous-arbre droit !

```c
bintree_t suppr_max (bintree_t tree) {
   if (tree == NULL) return NULL;
   if (tree->fils_droit == NULL) {
     node_t* fils_gauche = tree->fils_gauche;
     free (tree);
     return fils_gauche;
   }
   else {
     tree->fils_droit = suppr_max (tree->fils_droit);
     return tree;
   }
}
```


Suppression d'un élément x quelconque (1/4)

Suppression d'un nœud de l'ABR :

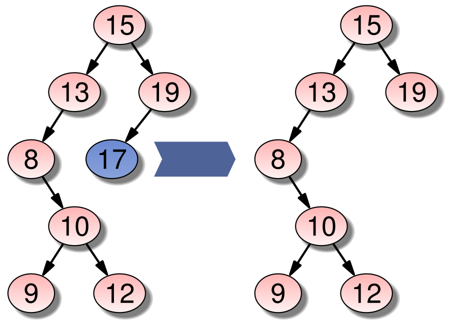
Si le nœud n'a qu'un enfant, rechaîner cet enfant :



Suppression d'un élément x quelconque (2/4)

Suppression d'un nœud de l'ABR :

Si le nœud n'a aucun enfant, le supprimer simplement :



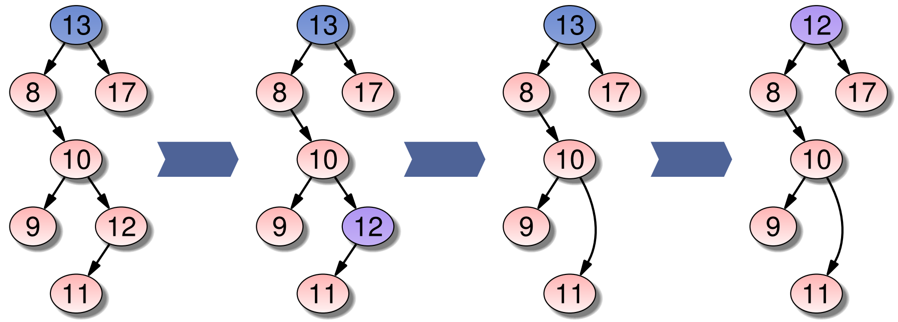
Suppression d'un élément x quelconque (3/4)

- Si le nœud a 2 enfants :
- Soit y le max du sous-arbre gauche de x

  $\Longrightarrow \forall z$ dans le sous-arbre gauche de x : $z < y$

  $\Longrightarrow \forall t$ dans le sous-arbre droit de x : $y < t$

remplacer x par y et rechaîner le sous-arbre gauche de y
($\Longrightarrow$ utiliser suppr_max pour le rechaînage)



Suppression d'un élément *x* quelconque (4/4)

```
bintree_t suppr (bintree_t tree, int elt) {
  // on recherche le noeud à supprimer
  if (tree == NULL) throw std::exception ();
  if (tree->label > elt) {
    tree->fils_gauche = suppr (tree->fils_gauche, elt);
    return tree;
  }
  if (tree->label < elt) {
    tree->fils_droit = suppr (tree->fils_droit, elt);
    return tree;
  }

  // si le noeud a au plus un fils
  if (tree->fils_gauche == NULL) {
    node_t* fils_droit = tree->fils_droit;
    free (tree);
    return fils_droit;
  }
  if (tree->fils_droit == NULL) {
    node_t* fils_gauche = tree->fils_gauche;
    free (tree);
    return fils_gauche;
  }

  // si le noeud a 2 enfants
  tree->label = get_max(tree->fils_gauche);
  tree->fils_gauche = suppr_max(tree->fils_gauche);
  return tree;
}
```


Conclusion sur les ABR

- ABR intéressants pour représenter des ensembles ordonnés de clés.
- Les alternatives (tableaux ou listes) ont de bien moins bons comportements dans les opérations usuelles : ajout / suppression / recherche.
- Dans tous les algorithmes des ABRs, le temps de calcul est proportionnel à la hauteur de l'arbre (et non au nombre de clés comme pour les autres alternatives)
- Mais, dans le pire des cas, la hauteur de l'arbre est le nombre de clés dans l'arbre.
- En moyenne, les ABRs sont quand même souvent intéressants.
- Pour éviter les mauvais cas : **équilibrage des arbres**.